Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Computación Científica

Modelo matemático de optimización en la incorporación de los costos de transacción en el modelo de Markowitz para la asignación de activos financieros

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica

AUTOR

César Gabriel CARLOS MOLINA

ASESOR

Mg. Luis Javier VÁSQUEZ SERPA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Carlos, C. (2019). *Modelo matemático de optimización en la incorporación de los costos de transacción en el modelo de Markowitz para la asignación de activos financieros*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Computación Científica. Escuela Profesional de Computación Científica, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor (dato opcional):

Código Orcid del asesor o asesores: 0000-0002-5414-6764

DNI del autor: 48063986

Grupo de investigación: MODELAMIENTO EN EDP Y EDE CON APLICACIONES NUMERICAS

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación: Calle Germán Amézaga N° 375 - Edificio Jorge Basadre, Ciudad Universitaria, Lima 1.

Año o rango de años que la investigación abarcó: 2017-2018

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Escuela Profesional de Computación Científica

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:00 hrs. del jueves 25 de abril del 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador:

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre	Presidente
Dra. María Natividad Zegarra Garay	Miembro
Mg. Luis Javier Vásquez Serpa	Miembro Asesor

Para la sustentación de la tesis intitulada «MODELO MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN EN LA INCORPORACIÓN DE LOS COSTOS DE TRANSACCIÓN EN EL MODELO DE MARKOWITZ PARA LA ASIGNACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS», presentada por el bachiller CÉSAR GABRIEL CARLOS MOLINA, para obtener el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, el expositor mereció la aprobación de sobresaliente con mención, con un calificativo promedio de Diecinueve (19) (Números y letras).

A continuación los miembros del jurado, dan manifiesto que el bachiller CÉSAR GABRIEL CARLOS MOLINA, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Siendo las 11:40 Horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente ACTA en tres (3) copias originales.

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Presidente

Dra. María Natividad Zegarra Garay
Miembro

Mg. Luis Javier Vásquez Serpa
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

CARLOS MOLINA, CÉSAR GABRIEL

Modelo Matemático de Optimización en la Incorporación de los Costos de Transacción en el Modelo de Markowitz para la Asignación de Activos Financieros, (Lima) 2019.
XIII, 86 p., 29.7 cm, (UNMSM, Licenciado, Computación Científica, 2019).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Computación Científica.
UNMSM / FdeCM

“Divide en siete porciones lo que tienes, y hasta en ocho, porque nunca se sabe qué males pueden venir sobre la tierra”.

Eclesiastés 11:2

Dedicatoria

A Dios por ser mi guía y fortaleza.
A mis padres, César y Donata, por su paciencia y amor.
A mi hermana, Mónica, por siempre estar ahí para mí.
A mi tía Juana y mi abuelito Gabriel, los quiero mucho.

Agradecimientos

Gracias a mi asesor de tesis y profesor,
Mg. Luis Javier Vásquez Serpa, por
presentarme la oportunidad de iniciar este
trabajo de investigación, por su continuo apoyo y atención.

Gracias a mis amigos; Manuel, José y Kalín,
por hacer más divertida la vida en la Facultad,
su ayuda dentro y fuera de las aulas y todas
las experiencias compartidas estos años y que
continuaran por muchos año más.

Gracias a Dios
por permitirme tener una familia que
siempre creyó en mí y gracias a mi familia
por ser la motivación para cada día llegar más lejos
en mi vida y carrera profesional.

Resumen

MODELO MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN EN LA INCORPORACIÓN DE LOS COSTOS DE TRANSACCIÓN EN EL MODELO DE MARKOWITZ PARA LA ASIGNACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS

El modelo de Markowitz calcula cuantitativamente la combinación óptima de activos que forma el portafolio de riesgo mínimo dado un retorno esperado (ganancia) predeterminado.

La inclusión de costos de transacción es una parte importante del proceso de mantenimiento del portafolio óptimo, ante las restricciones que se dan en la práctica. En este trabajo se extendió el problema de selección de portafolio para incluir costos de transacción proporcionales al valor de los activos (acciones de bolsa), para el caso particular en que el retorno se obtiene del portafolio de pesos iguales. Se usaron los conjuntos de herramientas de de alimentación de datos, econométricas y financieras de MATLAB® para desarrollar el programa que automatiza la optimización de portafolio y la asignación de activos, presentado con una interfaz gráfica desarrollada en GUIDE.

El análisis de los resultados obtenidos con el programa antes mencionado confirmó que ignorar los costos de transacción resulta en portafolios ineficientes y que un control de estos costos resultará en un impacto positivo en el desempeño del portafolio. Además, la solución o frontera eficiente obtenida cuando se incluyeron los costos de transacción siempre está por debajo de su equivalente sin restricciones, lo que representa menor retorno esperado de la inversión.

Palabras claves: Markowitz, costos de transacción, asignación de activos, MATLAB, selección de portafolio, acciones.

Abstract

OPTIMIZATION MODEL FOR THE INCORPORTATION OF TRANSACTION COSTS IN THE MARKOWITZ MODEL FOR ASSET ALLOCATION

Markowitz model finds the optimal assets mix that make up the portfolio with the lowest feasible risk given a predeterminated return (profit).

The inclusion of transactions costs is an important part in the process of keeping an optimal portfolio facing practical constraints. In this work, the portfolio selection problem is extended to include transaction costs, proportional to the assets (shares) value, and the expected return is computed from the equal-weight portfolio. Using the datafeed, econometric, financial toolboxes provided by MATLAB®, a program that automates simple portfolio optimization and asset allocation is developed, this program is presented with a graphic user interface created in GUIDE.

Analysis of the results obtained after the application of the forementioned program confirms that ignoring transactions costs results in inefficient portfolios, and controling these costs will result in a positive impact in the portfolio perfomance. Furthermore, the solution to the portfolio selection problem or efficiente frontier obtained when the transaction costs were included is always under its unconstrained equivalent, thus representing less expected return of the investment.

Keywords: Markowitz, transaction costs, asset allocation, MATLAB, portfolio selection, shares.

Tabla de Contenidos

Lista de Figuras

Lista de Cuadros

Introducción

Un individuo desea obtener ganancias con su capital comerciando en la bolsa de valores mediante un portafolio compuesto por activos de empresas internacionales del área tecnológica, para ello revisa los precios históricos de estas acciones hasta 5 años atrás asegurando que al venderlas en el futuro cercano a un precio mayor, es decir que espera obtener una ganancia sujeta al riesgo de que los precios no suban sino disminuyan su valor actual. La ganancia y riesgo de un portafolio pueden ser cuantificados, por la media aritmética y la desviación estándar de los activos respectivamente, de acuerdo a '*Selección de Portafolio*' (1952) de Harry Markowitz, y resueltos por los programas de optimización que permiten calcular estos valores a partir de grandes cantidades de datos.

La asignación o localización de activos es una estrategia de inversión que consiste en la toma de decisiones sobre la distribución de capital del inversonista entre diferentes clases de activos a su disposición, con el objetivo de equilibrar la relación entre la ganancia y el riesgo total de su portafolio. Un portafolio o cartera de inversión puede estar conformado por activos de renta variable, renta fija, materia prima, dinero en efectivo, divisas, etc. Para este trabajo, en particular se usan acciones de renta variable caracterizados por su riesgo y retorno esperado. La etapa más importante de la asignación de activos es la combinación de éstos que se encuentra sujeta a los objetivos y limitaciones propias del inversor. Esta combinación se realiza siguiendo el enfoque de la Teoría Moderna del Portafolio que busca maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo variando los pesos[1] de los activos en el portafolio, basado en el principio que diferentes activos se comportan de manera diferente en condiciones económicas y de mercado diferentes.

Para encontrar el portafolio de mínima varianza se resuelve el problema de programación cuadrática con el riesgo del portafolio expresado en función del vector portafolio y la matriz de covarianza de los retornos de activos como función objetivo, sujeto a dos restricciones principales:

- El retorno esperado del portafolio es un valor conocido.
- La suma de los elementos del vector portafolio (los pesos) suman la unidad, es

[1] Porcentaje que ocupan los activos en el portafolio

decir, se invierte el total del capital disponible.

El modelo de Markowitz, en su forma más simple, se denota de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \sigma_w = \frac{1}{2} w' \Sigma w \\
&\text{sujeto a:} \\
&\quad w'\mu = \mu_w \\
&\quad w' 1_N = 1
\end{aligned}$$

donde σ_w es el riesgo del portafolio, w es el vector de pesos de portafolio, Σ es la matriz de covarianza de activos, μ_w es el retorno esperado del portafolio, μ es el vector de retornos esperados de los activos y 1_N es el vector de N unos.

Diversos autores han contribuido a extender el alcance del modelo de Markowitz incluyendo restricciones prácticas que se dan al momento de comerciar activos, particularmente "*An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions' Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes*" [Pogue, 1970] fue uno de los primeros y más importantes en discutir las desventajas de ignorar estos costos al momento de escoger un portafolio. Otros autores desarrollaron algoritmos que incluyen los costos de transacción en forma de restricciones en el modelo original de Markowitz, en '*Rebalancing an Investment Portfolio in the Presence of Transaction Costs*' [Mitchell and Braun, 2002] donde se genera un problema de programación cuadrática fraccionaria y se analizan los resultados obtenidos computacionalmente para dos conjuntos de data empírica.

La intención de este trabajo es resaltar la importancia de incluir los costos de transacción en el modelo clásico de Markowitz mostrando la diferencia entre las soluciones de los problemas de optimización de portafolio sin y con estos costos. Para ellos se usan los conjuntos de herramientas econométricas y financieras que brinda MATLAB®, además del ambiente de desarrollo GUIDE que permite crear una interfaz más sencilla de usar para el usuario final y que también le permita visualizar la solución del problema de selección de activo en forma de frontera eficiente.

El retorno esperado de los activos se calcula de sus precios históricos en un intervalo fijo. Esta data es provista de manera gratuita por el sitio web *Yahoo Finance*[2] en conjunto con la bolsa de valores electrónica *NASDAQ*[3]. Luego, se muestra como obtener la media y varianza de esta data que sirven como medidas de retorno esperado y riesgo de los activos, respectivamente. Las soluciones al problemas de optimización obtenidas con el programa se agrupan en tablas para cada caso de costos de transacción, estas tablas estan conformadas por los índices de cada acción, el retorno y riesgo asociado a cada portafolio eficiente. La amplia diferencia entre los casos sin y con costos de transacción, en especial a medida que estos van aumentando, muestra la importancia de incluir los costos de transacción en el modelo

[2] https://finance.yahoo.com/

[3] https://new.nasdaq.com/market-activity

con el fin de no invertir en portafolios engañosos y evitar gastar en correciones del portafolio a futuro.

La organización de la tesis es como sigue:

En el capítulo 1, se tiene el marco teórico que cubre los trabajos anteriores relacionados al tema principal de la tesis en la sección de Antecedentes y a continuación las nociones previas sobre estadística, abarca los conceptos y fórmulas matemáticas de optimización y programación cuadrática, y finanzas.

En el capítulo 2, se desarrolla la Teoría Moderna del Portafolio, en específico el modelo de Markowitz junto a su solución teórica y como se interpreta la frontera eficiente. También se estudia todo lo referente a los costos de transacción y la formulación del modelo que incluye estos costos en el modelo de Markowitz.

En el capítulo 3, se trata la optimización de portafolios usando el software MATLAB®. Se detallan los procesos de optimización de portafolio y las funciones de los Conjuntos de Herramientas Financieras que permiten la implementación del modelo de Markowitz en MATLAB® y otras herramientas que se usarán para la creación del programa que automatiza el proceso de selección de portafolio.

En el capítulo 4, Implementación Computacional, se explican las etapas del desarrollo del programa y como ingresar correctamente la data. Se plantea un caso ejemplo y se resuelve usando el programa desarrollado. Finalizando este capítulo, el lector se encuentra en capacidad de usar el programa para resolver problemas de similar índole.

En el capítulo 5, se muestran los resultados obtenidos del caso ejemplo probando diferentes cantidades de costos de transacción proporcionales y se exploran los pesos obtenidos para cada portafolio óptimo sin y con costos de transacción además de sus respectivos riesgo y retorno de portafolio.

En el capítulo 6, tras un breve resumen del trabajo se exponen las conclusiones sobre el funcionamiento del programa, el efecto de la inclusión de los costos de transacción en el modelo de Markowitz y como interpretar las diferencias entre las fronteras eficientes de ambos casos. Se termina este capítulo con reflexiones y sugerencias para el inversor.

Por último, se encuentran los apéndices que contienen la data histórica con la que se trabajó, las funciones y propiedades del objeto Portafolio explicadas en detalle, además del código fuente de los programas en el lenguaje MATLAB®.

Capítulo 1

Marco Teórico

Para una mejor comprensión del siguiente trabajo se presentan algunas investigaciones relacionadas, las bases teóricas de los temas tratados y los conceptos involucrados:

1.1. Antecedentes

A nivel nacional, y a nivel de Sudamérica, hasta la fecha el principal trabajos sobre costos de transacción en el modelo de Markowitz es el realizado por Samuel De Greiff y Juan Carlos Rivera, investigadores de la Universidad EAFIT de Colombia. En su artículo publicado para el *Journal of Management and Economics for Iberoamerica* a inicios del año pasado, tratan sobre el uso de un algoritmo genérico multiobjetivo para mejorar el modelo media-varianza.

A nivel internacional existe extensa literatura de trabajos que se concentran tanto en la parte teórica y práctica de la inclusión de costos de transacción en el modelo Media-Varianza para la asignación de activos. Entre estos trabajos tenemos:

- En Adcock, C., Meade, N. (1994), A Simple Algorithm to Incorporate Transaction Costs in Quadratic Optimization, vemos un nuevo enfoque para minimizar una función híbrida, compuesta de una función módulo que representa los costos de transacción y funciones cuadráticas del modelo media-varianza, usando un algortimo de programación cuadrática probado.

- En Olsson, R. (2005), Portfolio management under transaction costs: Model development and Swedish evidence, examina la importancia de costos de transacción dentro del manejo de portafolio media-varianza extendiéndolo mediante un programa cuadrático y posteriormente se aplica a las acciones suecas a modo práctico. La evidencia sugiere que los costos de transacción mejoran el desempeño en las revisiones del modelo media-varianza.

- En Mansini, R., Speranza, M. (2005), An exact approach for portfolio selection with transaction costs and rounds,propone un enfoque basado en la partición del problema inicial en dos subproblemas y el uso de búsqueda heurística local simple para encontrar una solución inicial. Los resultados prácticos muestran una mejora impresiva en cuanto a tiempo computacional.

- En Lobo, M., Fazel, M., Boyd, S. (2006), Portfolio Optimization with linear and fixed transaction costs, consideran restricciones en exposición al riesgo además de los costos de transacción. Para este problema se procede de manera eficiente con métodos de optmización convexa. También se describe un método heurístico para encontrar un portafolio óptimo por medio de acotación a soluciones óptimas.

-En Pogue, G., (1970), An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions' Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes, considera los problemas ignorados en primera instancia por Markowitz y extiende el modelo para incluir las expectativas del inversor en cuanto a los dos components de costos de transacción del portafolio, cobros de corretaje y efectos de precios asociado con transacciones de gran facturación.

- En Marasović, B., Pivac, S., Vukasović, V. (2015), The Impact of Transaction Costs on Rebalancing an Investment Portfolio in Portfolio Optimization, se aplica el enfoque realista de considerer los costos de transacción en el mercado de capitales croata. Este modelo permite diferentes costos para diferentes bonos, al igual que diferentes costos para comprar o vender. Se investiga el impacto de los costos de transacción en la frontera eficiente.

- En Woodside-Oriakhi, M. (2011), Portfolio Optimisation with Transaction Cost, demuestra que las diferencias que surgen en la forma del portafolio en las fronteras eficientes cuando se somete a modelos de costos de transacción restringidos en la cardinalidad. También muestra que la optimización permite generar soluciones de buena calidad y en tiempo computacional aceptable.

- En Moeini, M. (2013), A Continuous Optimization Approach for the Financial Portfolio Selection under Discrete Asset Choice Constraints, investiga una aproximación continua por medio de programación con funciones convexas para resolver el problema de programación cuadrática entero mixto resultado de considerar costos de transacción en el modelo de media-varianza de Markowitz.

1.2. Preliminares Matemáticos

A continuación, un breve repaso de algunos conceptos matemáticos que se utilizarán en adelante para el análisis finaciero.

1.2.1. Medidas de Dispersión

Media

La media o *media aritmética* de un conjunto de datos se calcula dividiendo la suma de todos los valores entre la cantidad total de datos. En Finanzas, se usa para estimar el desempeño del precio de una acción de una compañía en un período de tiempo. La media representa el promedio simple de un conjunto de dos o más numeros, por ejemplo el valor medio de N precios históricos de un activo son denotados por $p_1, p_2, \ldots, p_N$ se expresa como:

$$Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i, i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.1}$$

Covarianza

La covarianza mide cómo varían dos variables conjuntamente. Sean dos variables X e Y con valor medio μ_X y μ_Y respectivamente, σ_{XY} denota la covarianza entre las dos variables y se expresa de la siguiente manera

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{N} \tag{1.2}$$

- Si $\sigma_{XY} < 0$ entonces cuando X aumenta su valor el de Y disminuye.
- Si $\sigma_{XY} > 0$ entonces cuando X aumenta su valor el de Y también.
- Si $\sigma_{XY} = 0$ entonces no existe una relación entre las variables X e Y.

Por la propiedad de simetría se sigue que $\sigma_{XY} = \sigma_{YX}$.

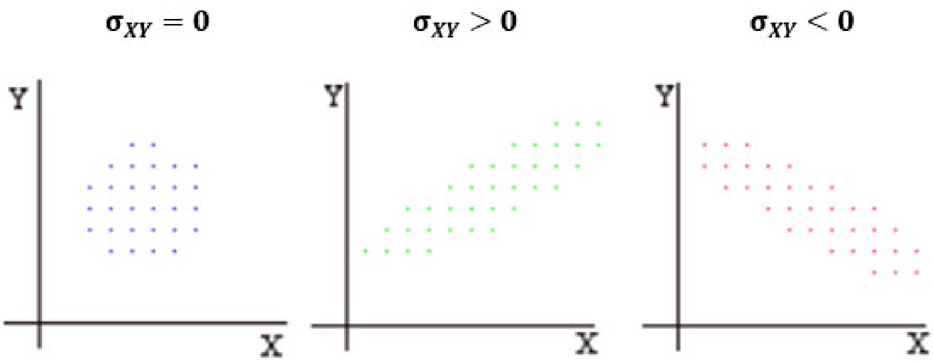


Figura 1.1: Gráfica que muestra las diferencias entre los tipos de covarianzas.

Fuente: Teoría y Problemas de Regresión

Varianza

La varianza es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos en relación a su valor medio, se calcula con la siguiente fórmula

$$Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)^2}{N} \tag{1.3}$$

También se define la varianza como la covarianza de una variable aleatoria consigo misma, $Var(X) = Cov(X, X)$.

1.2.2. Programación No Lineal

Un problema de programación no lineal es un tipo de problema de optimización, donde la función objetivo f y las restricciones g son funciones no lineales, que consiste en encontrar un $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{s.a.} \\ &g_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{NLP}$$

y $x \geq 0$, con $f(x)$ y $g_i(x)$ son funciones dadas de n variables.

Definición 1. *La **región factible** del problema de programación no lineal NLP es el conjunto de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen las m restricciones en el mismo. Un punto en esta región se conoce como punto factible.*

Definición 2. *Cualquier punto* $\bar{x}$ *en la región factible para el que se cumpla*

$$f(\bar{x}) \leq f(x)$$

en todos los puntos x *de la región factible es una* ***solución óptima*** *del problema NLP de minimización.*

Funciones convexas y cóncavas

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función definida para todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en un conjunto convexo S.

Definición 3. *Una función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es una* ***función convexa*** *en un conjunto convexo* S *si para cualquier* $x' \in S$ *y* $x'' \in S$

$$f[cx' + (1-c)x''] \leq cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{1.4}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$.

Definición 4. *Una función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es una* ***función cóncava*** *en un conjunto convexo* S *si para cualquier* $x' \in S$ *y* $x'' \in S$

$$f[cx' + (1-c)x''] \geq cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{1.5}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$.

Matrices Definida Positiva y Negativa

Definición 5. *Sea una matriz* B*, se define la forma cuadrática tal que* $Q = x'Bx$*. Entonces para cualquier* x *no nulo se tiene:*

- B *es definida positiva si* $Q > 0$
- B *es semidefinida positiva si* $Q \geq 0$
- B *es definida negativa si* $Q < 0$

- *B es semidefinida negativa si $Q \leq 0$*

Definición 6. *Sea una matriz A simétrica de $N \times N$ elementos y además $Q_A(y) = y'Ay$ es la forma cuadrática asociada con A. Entonces A y Q_A son llamadas* definidas positivas *si*

$$Q_A(y) = y'Ay > 0$$

para todo $y \in R^n, y \neq 0$.

Teorema 1. *Consideremos el problema de minimización NLP. Supongamos que la región factible S para este problema es un conjunto convexo. Si $f(x)$ es cóncava en S entonces cualquier mínimo local para NLP es una solución óptima del problema.*

1.2.3. Programación Cuadrática

Los problemas de programación cuadrática incluye los términos x_j^2 y $x_i x_j$ en su función objetivo [Hillier and Lieberman, 2001]. En notación matricial, el problema consiste en encontrar un x para

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x) &= cx - \frac{1}{2}x^T \Sigma x \\ &\text{s.a.} \\ &Ax \leq b \text{ y} x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde c es un vector fila, x y b vectores columna, Σ y A matrices y x^T es la traspuesta.

Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange son usados para resolver problemas tipo NLP en los que las restricciones son de igualdad, por ejemplo: [Winston, 2003]

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para resolver este problema, se asocia el **multiplicador** λ_i a cada restricción en 1.7 y se forma el **Lagrangiano**

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] \tag{1.9}$$

Luego el proceso consiste en encontrar un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ que minimize la función L.

Condiciones Kuhn-Tucker

Para que $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots, \bar{x_n})$ sea una solución óptima del problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
&\text{sujeto a:}\\
&g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1\\
&g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2\\
&\vdots\\
&g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&\vdots\\
&x_n \geq 0
\end{aligned} \tag{QP}$$

es necesario y suficiente que $\bar{x}$ cumpla las restricciones del problema y además que existan los multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_n$ satisfaciendo:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} - \bar{\mu}_j = 0 \tag{1.11}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \tag{1.12}$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right] \bar{x}_j = 0 \tag{1.13}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \tag{1.14}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0 \tag{1.15}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 2. *Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa y g_1, g_2 y g_m también son funciones convexas, entonces cualquier punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisface* (1.11), (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) *es una solución óptima de* (QP).

1.3. Preliminares Financieros

A continuación introducimos conceptos del área financiera que se usarán en el siguiente trabajo.

1.3.1. Sistema Financiero

El sistema financiero, según el Banco Central de Reserva del Perú, "*está constituido por todas sociedades o cuasi sociedades (fondos y fideicomisos) residentes dedicadas principalmente a la intermediación financiera o actividades financieras auxiliares (como la cobertura de riesgos y las prestaciones de jubilación)*." [BCR, 2011]

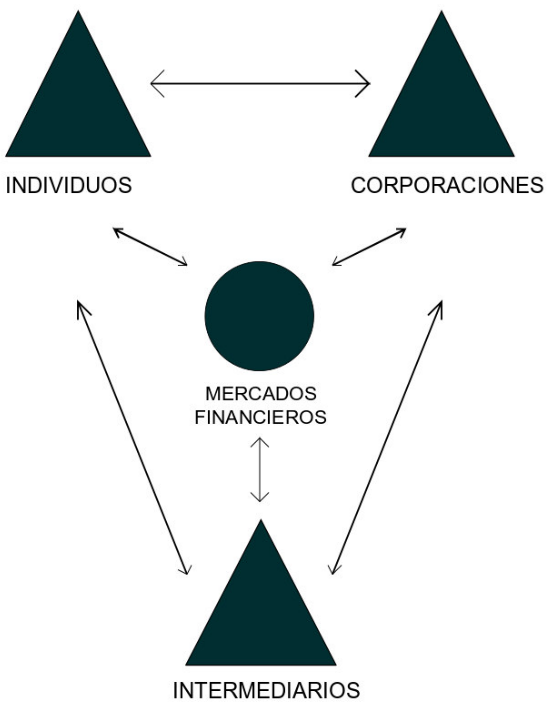


Figura 1.2: Esquema de los instrumentos financieros y su interacción. Fuente: Shiryaev

1.3.2. Estructuras Financieras

Repasamos brevemente la organización de las estructuras e intrumentos financieros básicos. Éstas ayudan a explicar la naturaleza de los problemas financieros y las herramientas que permiten resolverlos.

Individuos: Se encuentran como *consumidores* o *inversores*, su comportamiento origina el problema de optimización conocido como *toma de decisión de portafolio* que consiste en hallar la mejor asignación de fondos entre diversas propiedades [Shiryaev, 1999].

Corporaciones: Son los dueños de los valores tangibles (tierras, maquinaria, fábricas, etc.) y cumplen las funciones relacionadas a organizar y mantener el negocio [Shiryaev, 1999].

Intermediarios: Son las estructuras encargadas de mediar entre los individuos y las corporaciones, por ejemplo, los bancos, los fondos de pensiones y las bolsas de valores.

Mercados Financieros: Incluyen mercados de dinero en efectivo, metales preciosos y de **instrumentos financieros** *subyacentes* (cuentas bancarias, bonos, acciones) o *derivados* (opciones, garantías, futuros, etc).

1.3.3. Instrumentos Financieros

Activos

En finanzas, se denomina *activo* a la inversión que se realiza en forma de acciones, materias primas o bonos. Cada activo tiene un riesgo y retorno esperado asociado, los cuales son representados en el modelo de Markowitz por la desviación estándar y media de los retornos, respectivamente. El riesgo y retorno se calculan usando precios pasados de los activos.

Clases de activos

Son grupos de activos que poseen características en común (riesgo o rendimiento). Tenemos:

- **Activos tradicionales**: acciones, bonos y efectivo
- **Activos alternativos**: materia prima, inmuebles, seguros y moneda extranjera

Acciones

Una acción es la *parte proporcional del capital de una sociedad mercantil que da derecho a una parte en el reparto de beneficios y a una cuota de liquidación si la sociedad se disuelve* [BCR, 2011] que se emite para recaurdar fondos.

Bonos

Título emitido por un prestatario que obliga al emisor a realizar pagos específicos en un periodo determinado y reconociendo una tasa de interés implícita.[BCR, 2011]

Los principales emisores son instituciones gubernamenamentales o entidades coorporativas. Se dividen según su vencimiento en corto, mediano y largo plazo.

Pasivos

Un pasivo financiero es toda obligación, deuda o compromiso de pago en un plazo determinado, por ejemplo los *swaps*, débitos, pagarés y futuros.

1.3.4. Retorno de un Activo

El retorno es una de las principales características de un activo y se puede estimar conociendo los precios históricos del activo. Supongamos que se compra un activo en el instante t a un precio X_t y se mantiene en posesión hasta el tiempo $t+1$ cuando el nuevo precio del activo es X_{t+1}. Entonces el retorno del activo para un solo periodo se define como:

$$R_t = \frac{(X_{t+1} - X_t) + D}{X_t} = \frac{X_{t+1} + D}{X_t} - 1 \tag{1.16}$$

donde R_t es el retorno del activo X en el instante t y D los dividendos[1].

En general, suponemos que no se pagan dividendos en este periodo. Tenemos:

$$R_t = \frac{(X_{t+1} - X_t)}{X_t} = \frac{X_{t+1}}{X_t} - 1 \tag{1.17}$$

[1]Los dividendos son la parte de las ganancias que una empresa reparte entre sus accionistas

El retorno indica la tasa de éxito de un mantener el activo en el periodo t hasta $t+1$ y sirve para medir la rentabilidad de las compañías dueñas de los activos.

Debido a sus propiedades estadísticas más atractivas, los retornos resultan más convenientes de analizar que los precios de activos en sí.

Otras formas de medir el retorno de un activo son: *rentabilidad ponderada por tiempo*, *exceso de retorno* y *retorno anormal*.

1.3.5. Riesgo de un Activo

Es la probabilidad de que suceda un evento adverso, en este caso perder capital generalmente debido a la falta de información sobre el rendimiento del activo. En términos generales se puede esperar que a mayor riesgo, mayor retorno esperado.

Cuantitativamente, el riesgo representa las variaciones en el retorno de los activos (positivas o negativas) [Rasmussen, 2003]. El riesgo se mide por la desviación estándar de los retornos de los activos, sin embargo otras formas de medir el riesgo consisten en: *volatilidad*, *Beta*, *Riesgo de déficit* y *Riesgo a la baja*.

1.3.6. Venta corta

Al proceso de vender un activo que no se posee se le conoce como "venta corta" o *shorting* y consiste en pedir prestado un activo a un individuo o empresa para venderlo por un precio X_0. Después se reembolsa el préstamo comprando el activo por un precio de ahora X_1. El inversor obtendrá una ganancia de $X_0 - X_1$ solo si disminuye el precio del activo [Luenberg, 1998]. El riesgo es grande porque si el valor del activo aumenta entonces el potencial de pérdidas es ilimitado pues tanto X_1 como la pérdida pueden incrementarse arbitrariamente. Es por esto que algunas instituciones financieras e individuos prohiben y/o evitan las ventas en corto.

En la práctica, el proceso puro de venta corta es complementado por ciertas restricciones y garantías. Pero para el trabajo teórico, típicamente se asume que la venta en corto está permitida.

Determinamos el retorno asociado con las ventas cortas. Recibimos X_0 inicialmente y pagamos X_1 después, así que el gasto es $-X_0$ y el recibo final es $-X_1$ y luego el retorno total es

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0} \tag{1.18}$$

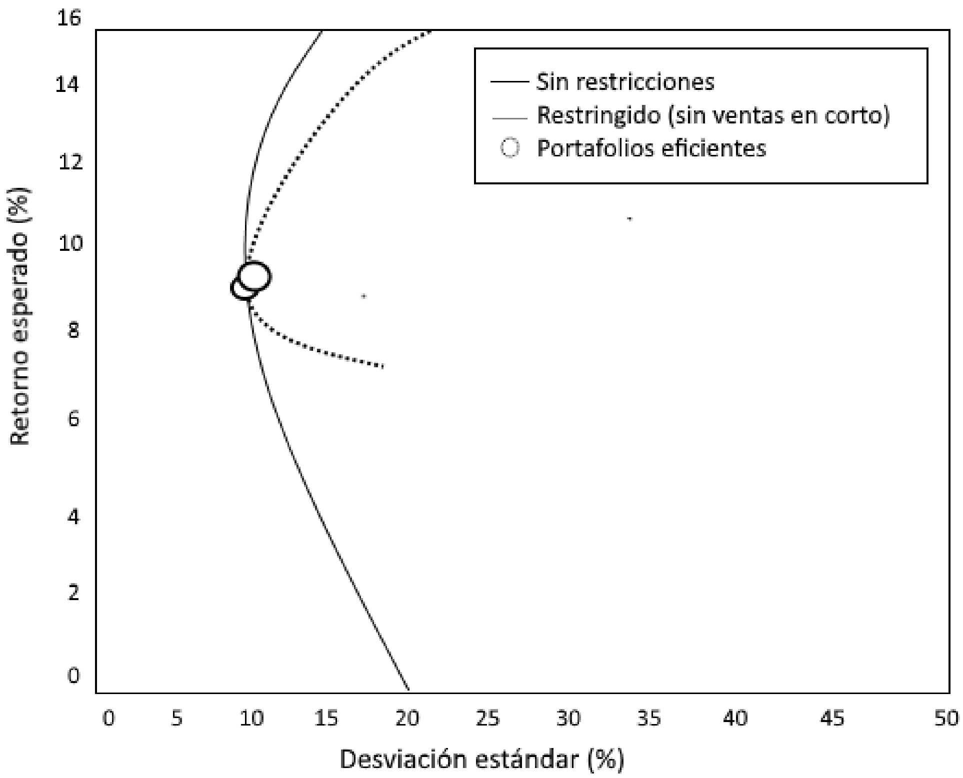


Figura 1.3: Comparación de la región factible estándar con y sin restricción de textitshorting

1.3.7. Asignación de activos

Según Darst, para un inversor profesional, la asignación de activos consiste en "*calcular las tasas de retorno, desviaciones estándar y correlación entre varias clases de activos, correr estas variables en un programa de optimización media-varianza para seleccioinar combinaciones de activos con diferentes perfiles de riesgo-retorno y analiazar e implementar una versión de asignación de activos deseada en vista de los objetivos, preferencias, restriciones y otros factores.*" [Darst, 2008]

Brinson, Singer y Beebover indicaron que "*hasta el 90 % del desempeño del portafolio puede ser explicado por la asginacion de activos inicial*" [Rasmussen, 2003], representando el proceso más importante en la vida del portafolio.

La asignación de activos se refiere al conjunto de decisiones relacionadas a la combinación apropiada de los pesos de activos en un portafolio de inversión según las preferencias del inversor.

Es una de las partes más importantes en el proceso de manejo de inversiones, y la toma de decisiones se basa con frecuencia en las recomendaciones de modelos de optimización riesgo-retorno. [Fabozzi et al., 2007]. La asignación de activos consiste de las decisiones sobre diferentes tipos de activos en un portafolio, según el perfil de riesgo del inversor [Torres, 2011].

Basados en objetivos de la inversión, aversión al riesgo y diversificación, existen tres tipos de asignación de activos.

Estratégica

Su objetivo principal es crear una combinación de activos que encuentre el equilibrio óptimo entre riesgo esperado y rendimiento a largo plazo [Idzorek, 2006]. Es independiente del entorno económico.

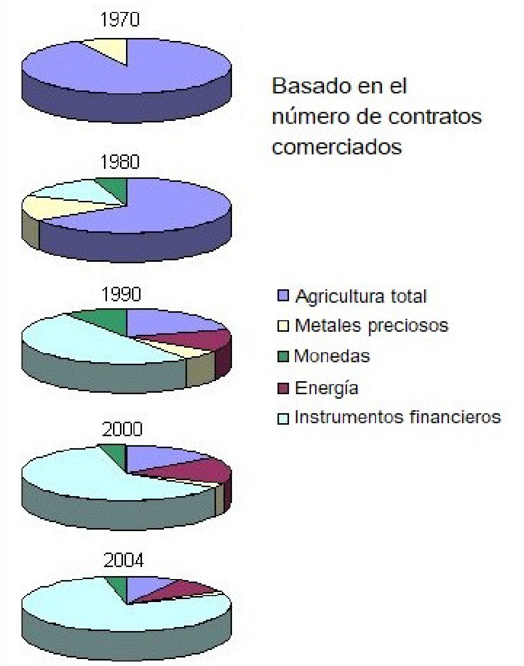


Figura 1.4: Evolución del mercado de futuros por sectores. FUENTE: Future Statistics by Major Commodity Group Annual Reports.

Dinámica

Similar a la asignación de activos estratégica, busca una combinación de activos que halle el equilibrio óptimo entre riesgo esperado y rendimiento a largo plazo. Sin embargo, bajo esta estrategia los portafolios dinámicos de asignación de activos se ajustan a los cambios en el entorno económico a lo largo de toda la duración [Idzorek, 2006].

Táctica

Es una estrategia donde el inversionista tiene un enfoque más activo que busca un portafolio compuesto principalmente con activos, sectores o acciones individuales que prensentan mayor portancial de ganancias [Blitz and Vliet, 2008].

1.3.8. Gestión de portafolio

La gestión de portafolio consiste en el conjunto de decisiones relacionadas a los activos que conforman el portafolio de inversión, sujetas a los objetivos y preferencias personales del inversor tanto como a las condiciones económicas de su entorno. En general, es el proceso por el que se valoran las acciones que se van a comprar o se decide en cuales se deja de invertir para obtener una rentabilidad objetivo.

Portafolio

El portafolio o cartera de valores es un *conjunto de inversiones en títulos, valores de renta fija o variable y otros activos financieros que pertenecen a una persona natural o jurídica.*[BCR, 2011]

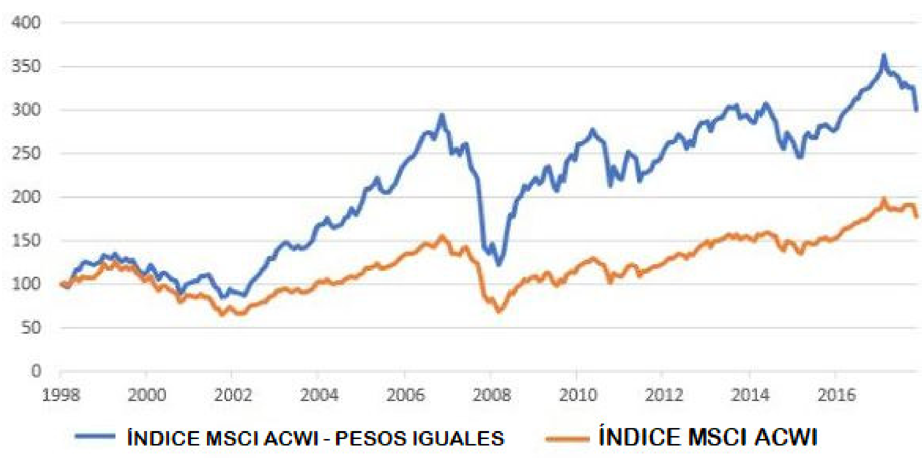


Figura 1.5: Portafolio de pesos iguales vs. portafolio de mercado. FUENTE: GoodReturns

Portafolio $\frac{1}{N}$

Es el portafolio en el que el inversor divide su capital en cantidad iguales entre los activos disponibles, resultando que el peso de cada activo sea efectivamente

$\frac{1}{N}$ por lo que se le conoce también como *portafolio de pesos iguales*.

Para este trabajo funcionará como portafolio inicial y es un punto de referencia importante pues del valor esperado obtenido con este portafolio se minimizará el riesgo para los nuevos portafolios sujetos a costos de transacción.

1.3.9. Teoría del mercado eficiente

El mercado financiero es el lugar donde se realiza el comercio (compra y venta) de activos financieros a bajos costos de transacción. Según el tipo de activo a comerciar, los mercados pueden ser de capital, de efectivo, de derivados, de cripto monedas, etc.

La hipótesis del mercado eficiente afirma que un mercado es eficiente cuando todos los activos están perfectamente valorados y su precio refleja toda la información existente sobre ellos.

Si bien esta hipotésis no garantiza el comportamiento racional de los inversores, exige que las reacciones de los inversores (sobrereacción, infrareacción) sean aleatorias de modo que permitan un equilibrio entre ellas.

1.3.10. Aversión al riesgo

La aversión al riesgo es una característica de los inversores que ante la incertidumbre optan por la opción más segura, por ejemplo, poner ahorros en el banco con un retorno asegurado a riesgo mínimo en lugar de invertir en un activo con mayores retornos y riesgo más grande.

Una manera de formalizar este comportamiento es a través del análisis media-varianza. El principio de aversión al riesgo luego dice que si diversas oportunidades de inversión tienen la misma media pero diferentes varianzas, un inversor racional o averso al riesgo seleccionará la que tenga la varianza más pequeña.

Capítulo 2

Teoría Moderna del Portafolio

Iniciada por Harry Markowitz en 1952 con su artículo '*Selección de Portafolio*', la Teoría Moderna del Portafolio estudia como los inversores aversos al riesgo pueden construir portafolios que optimizen la relación entre el riesgo y el retorno esperado de su portafolio, es decir, maximizar el retorno esperado dependiendo del nivel de riesgo que esté dispuesto a tomar. En ese sentido, la alta rentabilidad siempre esta asociada a un nivel más alto de riesgo. De acuerdo a esta teoría, las soluciones óptimas que resultan en mayor retorno esperado del portafolio conforman la curva conocida como *frontera eficiente*.

Esta teoría de inversión usa las medidas de *varianza* para cuantificar el riesgo del portafolio y la *media* para aproximar el retorno esperado, de ahí que también se conoce al modelo propuesto por Markowitz como *modelo media-varianza*, además de la *correlación* para denotar la matriz de correlación de activos.

2.1. Caracterización del Portafolio

Al igual que los activos, un portafolio también se caracteriza por su retorno y riesgo. A esto le añadimos un nuevo concepto llamado 'eficiencia de portafolio' para introducir el modelo de Markowitz.

2.1.1. Retorno del Portafolio

Supongamos que se dispone de N activos diferentes para formar un portafolio. Para esto, se reparte una cantidad X_0 entre los N activos. Luego seleccionamos unas cantidades $X_{0i}, i = 1, 2 \ldots, N$, tal que

$$\sum_{i=1}^{N} X_{0i} = X_0$$

donde X_{0i} representa la cantidad a ser invertida en el activo i-ésimo.

Si se permite la venta corta entonces algunos de los elementos de X_{0i} pueden ser negativos; de lo contrario se restringue que los X_{0i} sean no-negativos.

Las cantidades invertidas pueden ser expresadas como fracciones de la inversión total:

$$X_{0i} = w_i X_0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.1}$$

donde w_i es el peso o fracción del activo i en el portafolio. Entonces se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{2.2}$$

El retorno de portafolio es la suma ponderada de los retornos en los activos del portafolio donde los retornos de los activos que pertenecen al portafolio se multiplican por el peso que mantienen en dicho portafolio [Fabozzi et al., 2007].

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i \tag{2.3}$$

donde R_i el retorno total del activo i, w_i es el peso del activo i en el portafolio y R_p es el retorno total del portafolio.

2.1.2. Riesgo del Portafolio

Se denota la varianza del retorno de un activo i mediante σ_i^2, la varianza del retorno del portafolio con σ_p^2 y la covarianza del retorno del activo i y el activo j con σ_{ij}. Para hallar el riesgo de portafolio se realiza un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[(r - \bar{r})^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{N} w_i r_i - \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{r_i})^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{N} w_i (r_i - \overline{r_i}))(\sum_{j=1}^{N} w_j (r_j - \overline{r_j}))] \\
&= E[\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Este resultado es de suma importancia pues muestra como la varianza del retorno de un portafolio puede ser calculado fácilmente de las covarianzas de los pares de retornos de activos y los pesos de activos usados en el portafolio [Fabozzi et al., 2007, Vásquez et al., 2017].

2.1.3. Correlación de activos

Recordando el concepto de correlación de la sección 'Preliminares Matemáticos', consideremos el caso donde las variables son los precios históricos de cuatro acciones A, B, C, D a lo largo de un año en un intervalo mensual. Adicionalmente se considera el caso del portafolio compuesto de ambas acciones en igual proporción para cada ejemplo permitiendo comparar su comportamiento con el de las acciones individuales. Sean ρ_{AB}, ρ_{AC} y ρ_{AD} los coeficientes de correlación entre las acciones A y B, A y C, y A y D respectivamente, podemos distinguir tres momentos característicos de la correlación entre activos.

Si $\rho_{AB} = 1$ significa que los valores de las acciones A y B están relacionadas en forma positiva perfecta.

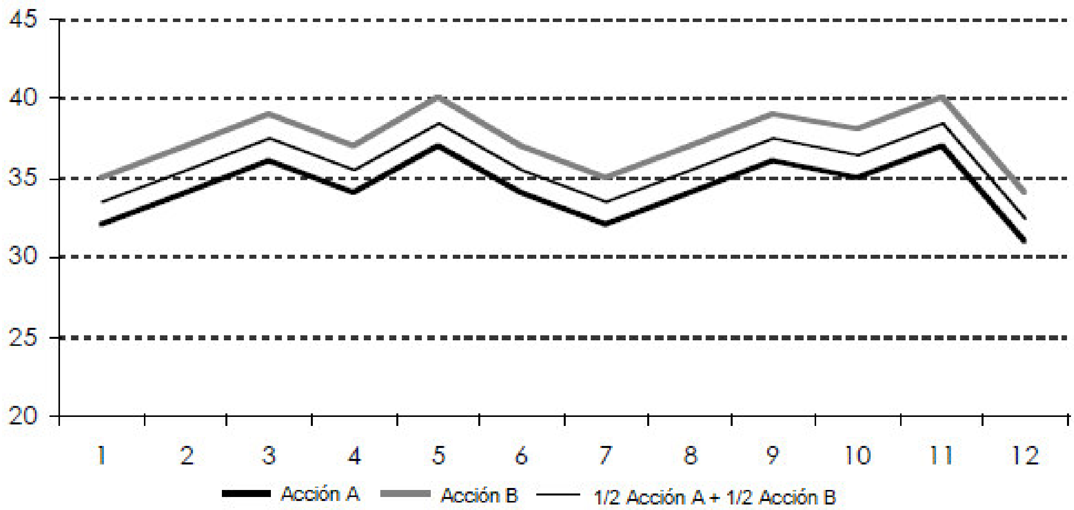


Figura 2.1: Coeficiente de correlación 1 para la acciones A y B. Fuente: Rasmussen.

Si $\rho_{AC} = 0$ significa que no existe relación alguna entre los activos A y C.

Si $\rho_{AD} = -1$ significa que los valores de las acciones A y D están relacionadas linealmente de forma negativa perfecta.

Analizando el último caso, notamos que la combinación de esos activos elimina el riesgo potencial convirtiendo el retorno total en un valor constante. Esta situación no se logra en la práctica y permanece más bien como un ideal teórico.

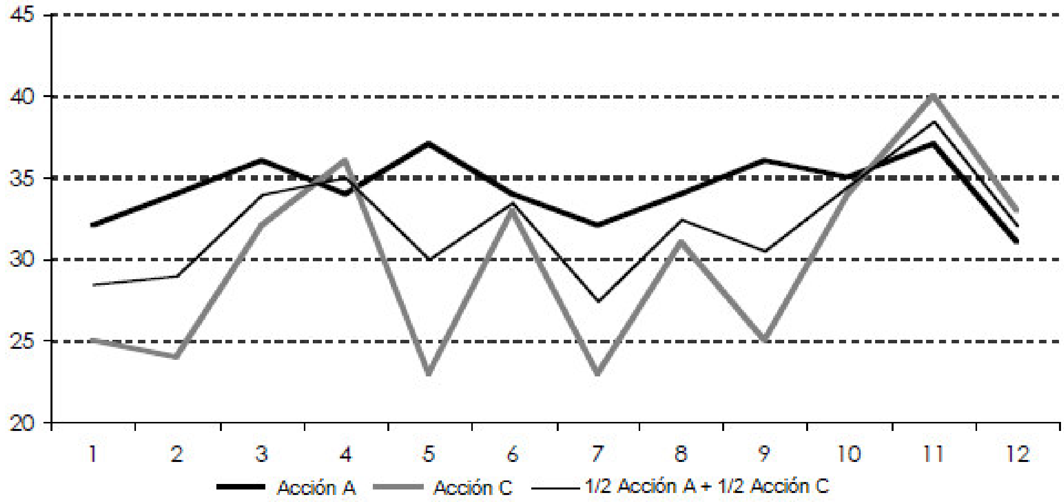


Figura 2.2: Coeficiente de correlación 0 para las acciones A y C. Fuente: Rasmussen.

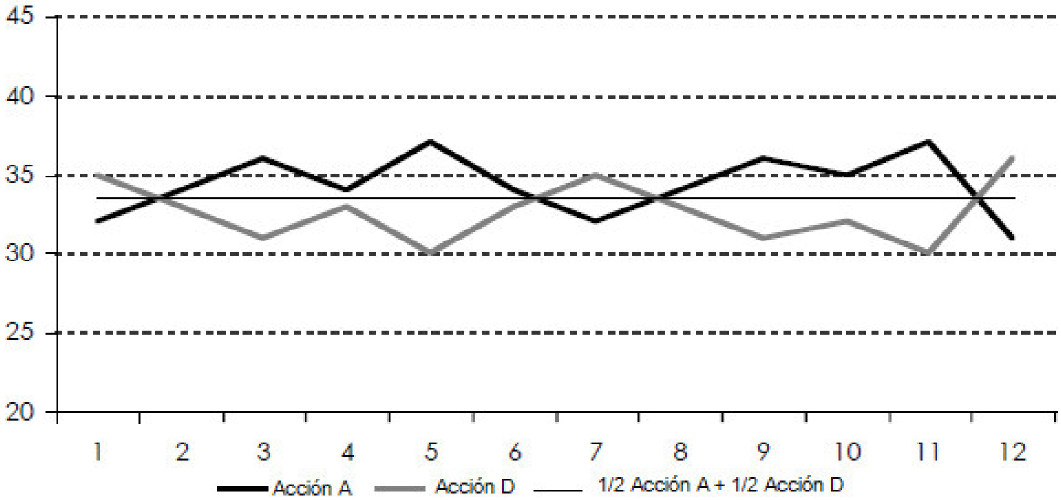


Figura 2.3: Coeficiente de correlación -1 para las acciones A y D. Fuente: Rasmussen.

2.2. El Modelo de Markowitz

"Muchos problemas de optimización de interés práctico sustancial involucran la minimización o maximización de una función de diversas variables sujetas a una o más restricciones. Estos problemas son conocidos como *problemas de optimización restringida*". [Peressini, 1988]

La Teoría Moderna del Portafolio tiene sus bases en el trabajo 'Selección de

Portafolio' de Markowitz (1952). Aquí Markowitz presentó un modelo que permite por primera vez describir un portafolio de activos cuantitativamente en función de la media de sus retornos individuales y la correlación entre la varianza de los retornos (razón por la que se conoce también como Modelo Media-Varianza) para un solo periodo de inversión.

El enfoque de Markowitz permite al inversonista o gerente de portafolio juzgar un portafolio por su comportamiento colectivo en lugar de considerar sus características y desempeño individual. Usó el análisis estadístico para medida de riesgo y programación matemática para selección de activos en un portafolio de manera eficiente. generando los portafolios eficientes.

Pero, ¿qué tal si existen dos activos que ofrecen gran retorno por un bajo riesgo? ¿y si un activo ofrece retorno aceptable a un riesgo moderado? ¿qué de los activos riesgosos que ofrecen el mayor retorno del mercado? El inversionista es libre de comerciar varios activos, por ello él o su agente de bolsa formará un portafolio.

"*El modelo de Markowitz provee al inversor un punto de referencia para construir y seleccionar portafolios, basado en el desempeño esperado de las inversiones y la aversión al riesgo del inversor*". [Fabozzi et al., 2007] En la actualidad continúa siendo uno de los modelos más usados cuando se reparte capital entre activos riesgosos debido a su simplicidad al momento de implementar y presentar resultados.

2.2.1. Suposiciones del modelo de Markowitz

- Los inversores son racionales y su comportamiento busca maximizar sus ganancias para un nivel dado de ingresos.
- Los inversores tienen acceso a la información justa y correcta sobre los retornos y riesgos de activos.
- Los mercados son eficiente y absorben la información rápida y efectivamente.
- Los inversores son aversos al riesgo e intentan minimizar el riesgo y maximizar retorno.
- Los inversores basan sus decisiones en los retornos esperados y varianza o desviación estándar de esos retornos.
- Los inversores prefieren retornos más altos para un nivel dado de riesgo.

La diversificación de activos permite garantizar que se cumplan estas suposiciones.

2.3. Formulación del Modelo

Pasando a un contexto más matemático para desarrollar la optimización media-varianza, sean N activos riesgosos con los que contamos. La inversión se caracteriza con un vector $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$' de pesos proporcionales de cada activo que cumple $w_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

Los retornos de activos $R = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ tienen media $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$ y una matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \ldots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

donde σ_{ij} denota la covarianza entre el activo i y j tal que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ y ρ_{ij} es la correlación entre el activo i y j. Bajo estas suposiciones, la tasa de retorno de un portafolio es una variable aleatoria $R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = w'R$ con momentos:

$$\mu_p = E[R_p] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i = w'\mu \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = var(E_p) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j cov(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i\sigma_{ij}w_j = w'\Sigma w \end{aligned} \tag{2.6}$$

En la práctica, los retornos esperados μ y la matriz de covarianza Σ son estimados, para el modelo de Markowitz son valores conocidos.

El problema que a resolver es, encontrar un nivel objetivo de tasa de retorno esperada y encontrar el portafolio con la mínima varianza que tenga esta tasa esperada de retorno. Es decir[1],

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{2.7}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i = \mu_p \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{2.9}$$

con μ_p nivel deseado de tasa de retorno esperado.

[1] El factor $\frac{1}{2}$ es añadido por conveniencia

2.4. Solución del problema de Markowitz

Se supone que la matriz de covarianza Σ es definida positiva, entonces el problema de Markowitz es estrictamente cóncavo y posee solución, además esta solución es única.

Para encontrar la solución se usa el método de multiplicadores Lagrangianos. Primero, se forma el Lagrangiano de la forma:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda_1(\sum_{i=1}^{N} w_i - 1) - \lambda_2(\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i - \mu_p)$$

donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores Lagrangianos.

Derivando L con respecto de w_i y los multiplicadores Lagrangianos, e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij} w_j - \lambda_1 - \lambda_2 \mu_i = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^{N} w_i - 1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i - \mu_p = 0$$

En forma matricial:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \Sigma w - \lambda_1 1_N - \lambda_2 \mu = 0 \tag{2.10}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - w 1_N \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \mu_p - w\mu \tag{2.12}$$

De 2.10, se halla w en términos de λ_1 y λ_2:

$$w_0 = \Sigma^{-1}(\lambda_1 1_N + \lambda_2 \mu)$$

con $1_N = (1, 1, \ldots, 1)'$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)'$.

Para encontrar los valores de λ_1 y λ_2, se aplican las restricciones:

$$1 = 1_N' w_0 = 1_N' \Sigma^{-1} \Sigma w_0 = \lambda_1(1_N' \Sigma^{-1} 1_N) + \lambda_2(1_N' \Sigma^{-1} \mu') \tag{2.13}$$
$$\mu_p = \mu' w_0 = \mu' \Sigma^{-1} \Sigma w_0 = \lambda_1(\mu' \Sigma^{-1} 1_N) + \lambda_2(\mu' \Sigma^{-1} \mu) \tag{2.14}$$

Hacemos: $a = 1_N' \Sigma^{-1} 1_N$, $b = 1_N' \Sigma^{-1} \mu$ y $c = \mu' \Sigma^{-1} \mu$, de modo que nuestro sistema ahora es:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

que tiene solución

$$\lambda_1 = \frac{c - b\mu_p}{ac - b^2}$$
$$\lambda_2 = \frac{a\mu_p - b}{ac - b^2}$$

conn λ_1 y λ_2 dependientes de μ_p, y además satisfacen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Suponiendo que $\mu \neq g 1_N$ (g constante) y que Σ^{-1} existe. Dado que Σ es definida positiva, entonces $a, c \geq 0$ y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene $ac - b^2 \geq 0$.

La mínima varianza de portafolio para un retorno μ_p dado es:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_0' \Sigma w_0 = w_0' \Sigma (\lambda_1 \Sigma^{-1} 1_N + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mu) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \mu_p \\ &= \frac{a\mu_p^2 - 2b\mu_p + c}{ac - b^2} \end{aligned}$$

El conjunto de portafolio con varianza mínima está representado por una curva parabólica en el plano $\sigma_p^2 - \mu_p$. Esta curva se genera cambiando el valor de μ_p.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{a\mu_p^2 - 2b\mu_p + c}{ac - b^2}} \tag{2.15}$$

2.5. Frontera Eficiente

La frontera eficiente es la línea que se forma en el espacio riesgo vs. retorno formada por todos los portafolios eficientes u óptimos que son soluciones del problema de optimización de Markowitz. Tiene por extremos a las portafolios de mínima varianza y de máxima varianza (que es el portafolio resultante de invertir en el activo con mayor riesgo y retorno) [Rasmussen, 2003].

Para un análisis teórico más extenso sobre la frontera eficiente se recomienda revisar [Best, 2010].

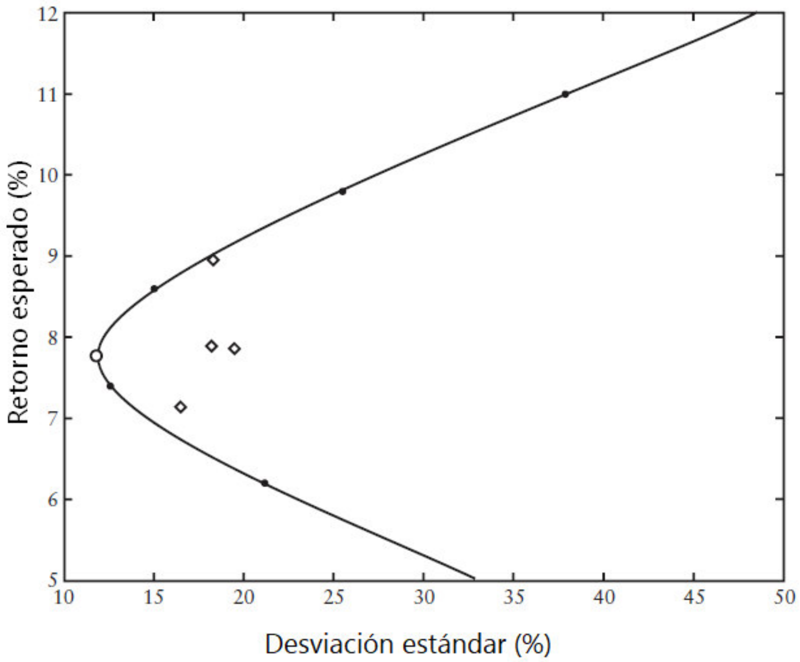


Figura 2.4: La frontera eficiente media-varianza de 4 activos, cada diamante representa la desviación estándar y su correspondiente retorno esperado para cada activo. Fuente: Fabozzi

2.5.1. Costos de transacción

Los costos de transacción tienen una influencia sustancial en la decisión de asignación de portafolio por lo que necesitan ser estimados con sumo cuidado. [Fabozzi et al., 2007]

Son independientes del tamaño de la transacción y las condiciones de mercado. Mientras los costos de transacción fijos son "lo que son"[Fabozzi et al., 2007], los gerentes de portafolio y corredores pueden buscar reducir, optimizar y eficientemente manejar los costos de transacción variables.

Debido a los costos asociados a los mercados financieros, una transacción pobremente ejecutada puede consumir directamente los retornos del portafolio [Fabozzi et al., 2007]. En la práctica, estas comisiones no son tomadas en cuesta y el inversor compra o vende acciones sin considerar como le afectará a mediano y largo plazo.

Por ello, los costos de transacción deben ser tomados en cuenta especialmente cuando se participa en el mercado de valores, un portafolio que no considera los costos adicionales en los que incurre al momento de comerciar generará pérdidas que se hubieran evitado con un modelo que sí considere estas limitaciones [Fabozzi et al., 2007].

Costos de transacción explícitos

Costos	Fijos	Variables
Explícitos	Comisiones	Diferencial compra/venta
	Tarifa	Impuestos
Implícitos		Costo de demora
		Riesgo de movimiento de precio
		Costos de Impacto de mercado
		Riesgo de momento
		Costo de oportunidad

Cuadro 2.1: Tipos de costos de transacción propuesto por Kissell y Glantz

Comisiones y tarifas Las comisiones son pagadas a los agentes para realizar comercios. Normalmente, las comisiones en intercambios de valores son negociables. Las tarifas cobradas por una institución que mantiene los valores bajo custodia para un inversor son referidas como tarifas custodiales. Cuando la propiedad sobre una acción es transferida, el inversor es cobrado una tarifa de transferencia.

Impuestos Los impuestos más comunes son impuestos sobre ganancia de capital e impuestos sobre dividendos. La ley de impuestos distingue entre 2 tipos de impuestos sobre ganancia de capital: a corto plazo y largo plazo. El primer es de acuerdo al grupo de impuestos del inversor, mientras que la última actualmente se encuentra en 15 %.

Diferencial compra/venta El diferencial compraventa es el costo de transacción inmediato que el mercado cobra a cualquiera por el privilegio de comerciar. Es el precio cobrado por los repartidores por proveer inmediatez y estabilidad de precio en presencia de alteraciones de orden de corto plazo. Los repartidores actúan como un amortiguador entre los inversores que quieran comprar y vender, y de ese modo proveen estabilidad en el mercado asegurándose que se mantenga cierto orden. [Fabozzi et al., 2007]

Costos de transacción implícitos

Demora de inversión Existe una demora entre el tiempo en el que el gerente de portafolio hace una decisión de compra/venta de un valor y cuando el intercambio real se lleva al mercado por el corredor. Si el precio del valor cambia durante este tiempo, el cambio de precio representa los costos de demora de inversión, o el costo de no poder ejecutarlo inmediatamente. [Fabozzi et al., 2007]

Costos de impacto de mercado El costo de impacto de mercado de una transacción es la desviación del precio de transacción del precio de mercado que hubiera prevalecido si la transacción no hubiese ocurrido.

Distinguimos entre 2 clases de costos de impacto de mercado, temporal y permanente. El costo de impacto de mercado total es calculado como la suma de los dos. El costo de impacto de precio temporario es de naturaleza transitoria y puede ser visto como concesión de liquidez adicional necesaria para que el proveedor de liquidez tome el pedido. [Fabozzi et al., 2007]

El costo de impacto de precio permanente, sin embargo, refleja el cambio de precio persistente que resulta cuando el mercado recibe la información provista por la transacción. Intuitivamente, una transacción de compra revela al mercado que el valor puede ser subestimado, mientras que una transacción de venta señala que el valor puede ser sobrevalorado. Los precios de valores cambian cuando los participantes del mercado ajustan sus visiones y percepciones mientras observan la información contenida en los nuevos intercambios a lo largo del día de comercio.

Riesgo de movimiento de precio En general, el mercado de acciones muestra un cambio positivo que da lugar al riesgo de movimiento de precio. Similarmente, las acciones individuales, al menos temporalmente, muestran tendencias al alza o a la baja. Un intercambio que va en la misma dirección del mercado general o un valor individual es expuesto a un riesgo de precio.

El riesgo de movimiento de precio para una orden de compra está definido como el incremento de precio durante el tiempo del intercambio que es atribuido a la tendencia general de un valor, mientras que la parte sobrante son los costos de impacto de mercado.

Costos de momento de mercado El momento de mercado es una medida de la capacidad del mercado de sostener un aumento o disminución en precios y permite predecir estos cambios en los precios. Los costos de momento de mercado se deben al movimiento en el precio de un valor en el tiempo de la transacción que pueden ser atribuidos a otros participantes del mercado o volatilidad del mercado general.

Costos de oportunidad El costo de oportunidad se refiere a las ganancias hipotéticas en caso se hubiera invertido la totalidad del capital de un inversor en la mejor alternativa disponible a la decisión que se tomó o se plantea tomar.

2.6. Inclusión de costos de transacción en el modelo de Markowitz

Desde su publicación, diversos autores han trabajado en modificar y extender la teoría de Markowitz para incluir costos asociados a las revisiones de portafolio, entre los que trabajaron con costos de transacción tenemos a Pogue [Pogue, 1970] (el primero y de mayor importancia), Adcock y Meade [Adcock and Meade, 1994], Lobo, Fazel, y Boyd [Lobo et al., 2007], Mitchell y Braun [Mitchell and Braun, 2002].

Repasamos el trabajo de [Marasovic et al., 2015] sobre el análisis teórico de la inclusión de costos de transacción en el modelo media-varianza.

Consideremos las transacciones que se hacen para cambiar un portafolio existente $\bar{x}$ en un portafolio eficiente x. Sean u_i y v_i las cantidades compradas y vendidas de un activo i, respectivamente. La cantidad invertida en cada uno de los activos será:

$$x = \bar{x} + u - v \tag{2.16}$$

donde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

Sean C_{B_i} y C_{S_i} los costos de transacción resultantes de comprar y vender una unidad del activo i.

Sea x_0 la cantidad total gastada en costos de transacción, entonces:

$$x_0 = C'_B u + C'_S v \tag{2.17}$$

La cantidad total que se invierte en los activos, después de pagar los costos de transacción, será $1 - x_0$. Obtenemos la restricción

$$e'x = 1 - C'_B u - C'_S v \tag{2.18}$$

Explotando el hecho que $e'\bar{x} = 1$, 2.16 nos da:

$$ex' = e'\bar{x} - e'u + e'v - C'_B u - C'_S v \tag{2.19}$$

La ecuación resultante es:

$$(C_B + e)'u + (C_S - e)'v = 0 \tag{2.20}$$

Esta ecuación puede ser usada para crear un modelo para minimizar la varianza del portafolio resultante sujeto a cumplir un retorno esperado de E_0 en presencia de costos de transacción proporcionales. El modelo resultante es:

$$\min\ x'Sx$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&x'.R \geq E_0 \\
&x - u + v = \bar{x} \\
&(C_B + e)'u + (C_S - e)'v = 0 \\
&u, v, x \geq 0
\end{aligned}
$$

Hasta este punto, hemos optimizado la medida de riesgo estándar para fronteras eficientes, esto es:

$$x'Sx = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{2.21}$$

Cuando no hay costos de transacción que pagar, siempre hay una unidad de efectivo disponible para invertir ($\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$). Esta suposición es implícita para la medida de riesgo estándar. Sin embargo, cuando los costos de transacción son diferentes de cero esta suposición ya no es válida. Se pagaran costos para volver a revisar el portafolio por lo que el objetivo apropiado es:

$$f(x) := \frac{x'Sx}{(1 - x_0)^2} \tag{2.22}$$

Aquí, x_0 es nuevamente la cantidad pagada en costos de transacción. Por lo tanto, $(1 - x_0)$ es la cantidad real disponible para inversión, asi que escogeremos escalar la medida de riesgo estándar por el cuadrado de la cantidad real invertida. Esto resulta en el problema de programación cuadrática fraccionaria (FQP) el cual resolveremos para encontrar el portafolio óptimo para un retorno esperado dado.

$$\min \frac{x'Sx}{(1 - x_0)^2}$$

Sujeto a:

$$x'.R \geq E_0 \tag{2.23}$$

$$x - u + v = \bar{x} \tag{2.24}$$

$$(C_B + e)'u + (C_S - e)'v = 0 \tag{2.25}$$

$$u, v, x \geq 0 \tag{2.26}$$

El objetivo fraccionario $f(x)$ puede volverse cuadrático usando la técnica de reemplazar el denominador por el cuadrado del reciproco de una variable. Sea

$$t := \frac{1}{1 - C_B'u - C_S'v}$$

Y luego definimos:

$$\hat{u} := tu, \hat{v} := tv, \hat{x} = tx$$

Dado que u y v están restringidos para ser no negativos, se debe cumplir $t \geq 1$. Ahora tenemos $t - C_B'u - C_S'v = 1$.

Las restricciones 2.23 a 2.26 pueden ser multiplicadas por t. Entonces el programa cuadrático fraccionario (FQP) es equivalente al problema de programación cuadrática (QP).

$$\min \hat{x}'S\hat{x}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}'.R \geq E_0 t \\
&\hat{x} - \hat{u} + \hat{v} - \hat{x}t = 0 \\
&(C_B + e)'\hat{u} + (C_S - e)'\hat{v} = 0 \\
&t - C_B'\hat{u} - C_S'\hat{v} = 1 \\
&\hat{u}, \hat{v}, \hat{x} \geq 0
\end{aligned}$$

Una vez encontrada una solución $(\hat{u}*, \hat{v}*, \hat{x}*, t*)$ de (QP), podemos obtener una solución$(u*, v*, x*)$ al programa original (FQP) reescalando $\hat{x}, \hat{u}$ y $\hat{v}$, tal que:

$$x* = \frac{\hat{x}*}{t*}, u* = \frac{\hat{u}*}{t*}, v* = \frac{\hat{v}*}{t*}.$$

La frontera eficiente se encuentra optimizando (QP) para diferentes valores de E_0 (retorno de portafolio). Como hemos visto, la inclusión de los costos de transacción en el modelo media-varianza se logró gracias al cambio de variables y la adición de dos restricciones lineales.

Una vez vista la parte teórica pasamos a continuación a estudiar la parte práctica y veremos como se resuelve este nuevo problema de optimización usando MATLAB®.

Capítulo 3

Optimización de Portafolio en MATLAB®

Este capítulo trata de identificar los elementos prácticos del problema de asignación de activos según el modelo de Markowitz incluyendo los costos de transacción. Supongamos el caso de un inversor que debe formar un portafolio óptimo con acciones de cinco empresas tecnológicas como máximo y comparar la diferencia cuando se incluyen costos de transacción proporcionales. Se analiza el comportamiento de los activos en un intervalo de doce meses anteriores a la compra obtenidos de la web *Yahoo! Finance* para calcular el retorno de los activos, obtener la media y formar la matriz de covarianza de activos.

Es necesario el uso de las herramientas del software MATLAB® para desarrollar los cálculos que involucran grandes cantidades de dato a modo de simplificar este proceso y porque estos datos sirven como entrada o *input* para el programa que resuelve el problema de optimización del inversor. El análisis de los procesos de optimización en MATLAB® y repaso de las funciones financieras del modelo de Markowitz que brinda este software permiten la implementación de la solución al problema de optimización en el entorno GUIDE.

3.1. Procesos de la Optimización de Portafolio

Se pueden diferenciar dos procesos fundamentales en la optimización de portafolios en MATLAB®, el proceso **Acceso** a la data histórica de los precios de activos y la **Configuración y Optimización** de los portafolios solución.

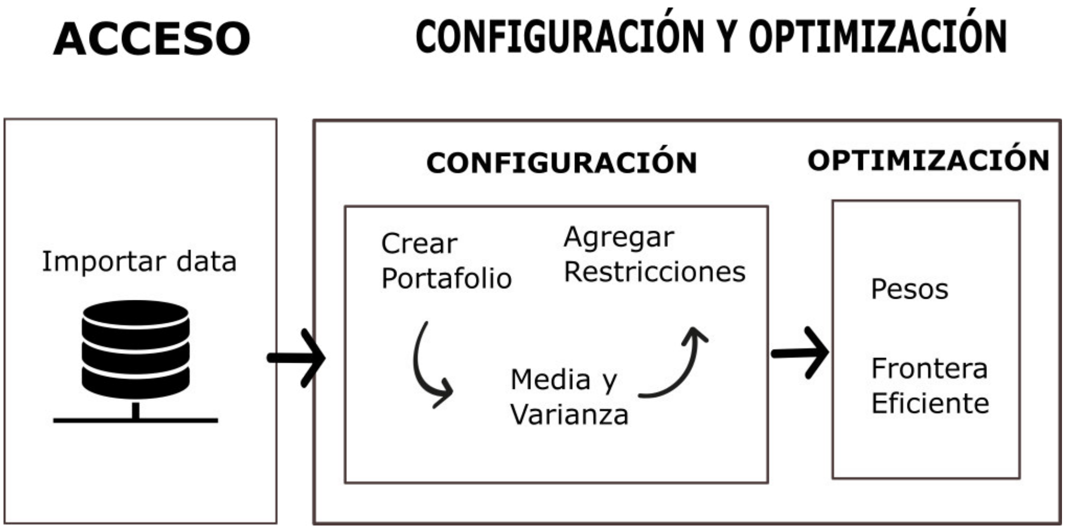


Figura 3.1: Esquema de los Procesos de Optimización de Portafolio en MATLAB®

3.1.1. Acceso a Data de Activos

Importar data

El propósito de este subproceso es garantizar al inversor que cuenta con la información correcta y completa de los precios históricos de acciones que integrarán su portafolio de inversión.

Las principales fuentes de data financiera son *Terminal*, *Eikon* y *Yahoo! Finance*, el primer servicio de *BLOOMBERG* y los dos últimos propiedad de *REUTERS*.

Yahoo! Finance muestra data en tiempo real (o en intervalos de un máximo de 30 minutos) del precio de acciones de al menos 10 bolsas bursátiles estadounidenses y más de 60 bolsas alrededor del mundo gracias a su proveedor *ICE Data Services*. [1] De los servicios mencionados anteriormente, éste es el único de acceso gratuito y además de contar con una interface limpia y sencilla permite descargar los precios históricos de acciones, dándole una ventaja sobre otros servicios en su uso para resolver problemas prácticos.

[1] Fuente: https://help.yahoo.com/kb/finance-for-web/SLN2310.html

Figura 3.2: Captura de pantalla de la interfaz del Terminal Bloomberg. Fuente: Lippincott Library

3.1.2. Configuración y optimización

El proceso de configuración consiste de diferentes estapas como la creación del portafolio, estimación de media y varianza, y declaración de las restricciones según las preferencias del inversor.

La etapa de optimización es donde se hallan los pesos del portafolio óptimo y de los otros portafolios que conforman la frontera eficiente así como los riesgos y retornos de cada uno, los cuales se visualizan en una interfaz independiente.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2	01/01/2013	null	null	null	null	null	null
3	01/02/2013	31.01	31.02	26.34	27.25	27.25	957639800
4	01/03/2013	27.049999	28.68	24.719999	25.58	25.58	727180500
5	01/04/2013	25.629999	28.1	25.15	27.77	27.77	738509200
6	01/05/2013	27.85	29.07	23.26	24.35	24.35	982094800
7	01/06/2013	24.27	25.190001	22.67	24.879999	24.879999	788331500
8	01/07/2013	24.969999	38.310001	24.15	36.799999	36.799999	1438017100
9	01/08/2013	37.299999	42.259998	36.02	41.290001	41.290001	1344994100
10	01/09/2013	41.84	51.599998	41.439999	50.23	50.23	1583083800
11	01/10/2013	49.970001	54.830002	45.259998	50.209999	50.209999	2032635000
12	01/11/2013	50.849998	52.09	43.549999	47.009998	47.009998	1357311900
13	01/12/2013	46.900002	58.580002	46.259998	54.650002	54.650002	1517533200
14	01/01/2014	54.830002	63.369999	51.849998	62.57	62.57	1294714800
15	01/02/2014	63.029999	71.440002	60.700001	68.459999	68.459999	1110774100
16	01/03/2014	66.959999	72.589996	57.98	60.240002	60.240002	1255440000
17	01/04/2014	60.459999	63.91	54.66	59.779999	59.779999	1883965100
18	01/05/2014	60.43	64.300003	56.259998	63.299999	63.299999	1120155500
19	01/06/2014	63.23	68	61.790001	67.290001	67.290001	863389800
20	01/07/2014	67.580002	76.739998	62.209999	72.650002	72.650002	1028365000
21	01/08/2014	72.220001	75.989998	71.550003	74.82	74.82	590763600
22	01/09/2014	75.010002	79.709999	73.07	79.040001	79.040001	720995800
23	01/10/2014	78.779999	81.160004	70.32	74.989998	74.989998	1083643000
24	01/11/2014	75.470001	78.269997	72.510002	77.699997	77.699997	490965300
25	01/12/2014	77.260002	82.169998	74.400002	78.019997	78.019997	534527100
26	01/01/2015	78.580002	79.25	73.540001	75.910004	75.910004	546033100
27	01/02/2015	76.110001	81.370003	73.449997	78.970001	78.970001	475148700
28	01/03/2015	79	86.07	77.260002	82.220001	82.220001	575349900
29	01/04/2015	82.5	85.589996	78.32	78.769997	78.769997	542124600
30	01/05/2015	79.239998	81.849998	76.790001	79.190002	79.190002	421870700
31	01/06/2015	79.300003	89.400002	78.660004	85.769997	85.769997	537560000
32	01/07/2015	86.769997	99.239998	85.230003	94.010002	94.010002	790617800

FB

Figura 3.3: Resumen de la compañía Facebook en Yahoo! Finances

Según vemos en la figura anterior, la data descargada es igual a la que se muestra en el sitio web en línea, es decir tenemos las columnas 'Date' (Fecha), 'Open' (Apertura), 'High' (Alto), 'Low' (Bajo), 'Close' (Cierre) , 'Adj. Close' (Cierre Ajustado) y 'Volume' (Volumen). Trabajaremos con el precio de cierre ajustado o 'Adj. Close' de ahora en adelante, por lo que el programa extraerá la columna correspondiente para cada activo para formar una matriz general con los precios históricos de todos los activos.

Convertir en retornos

Una vez que se posee la data de mercado con los precios históricos de las acciones de empresas en las que se desea realizar una inversión, se debe convertir en retornos de manera que se pueda aplicar el modelo de Markowitz. Para ello, haremos uso de la fórmula simple

$$R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

donde R es el retorno y P_i es el precio de la acción en el momento i.

Crear portafolio

A continuación se realiza la creación del portafolio a través del objeto *Portfolio* de las Herramientas Financieras de MATLAB®. Esta herramienta es de suma importancia porque es donde se almacenan los datos que permiten el gráfico de la frontera eficiente.

Hallar media y varianza

Se calculan la media y varianza de los retornos de precios históricos para cada activo que conformará el portafolio, una vez que se conocen estos valores se guardan en el objeto Portafolio junto a los nombres de los activos.

Establecer restricciones

El objeto Portafolio admite la inclusión de restricciones de acuerdo a las preferencias del inversor, la principal es la de *no shortselling* o de prohibir las ventas en corto que se puede traducir como restringir que los pesos de los activos sean no negativos. Estas restricciones se ingresan en forma de cotas, es decir, se ingresan los valores mínimos y máximos permitidos.

Para el caso de los costos de transacción, se ingresan por los costos de compra y venta por separado en forma de constante o vector.

```
       BuyCost: []
      SellCost: []
  RiskFreeRate: []
     AssetMean: []
    AssetCovar: []
 TrackingError: []
  TrackingPort: []
      Turnover: []
   BuyTurnover: []
  SellTurnover: []
          Name: []
     NumAssets: []
     AssetList: []
      InitPort: []
   AInequality: []
   bInequality: []
     AEquality: []
     bEquality: []
    LowerBound: []
    UpperBound: []
   LowerBudget: []
   UpperBudget: []
   GroupMatrix: []
    LowerGroup: []
    UpperGroup: []
        GroupA: []
        GroupB: []
    LowerRatio: []
    UpperRatio: []
```

Figura 3.4: Objeto Portafolio con propiedades por definir.

Encontrar riesgo, retorno y pesos de portafolio

En este subproceso se realiza la parte computacional. Una vez que se cuenta con los datos correctamente ingresados, se hace uso de las Herramientas Financieras que provee MATLAB® para resolver el problema de optimización.

La solución es la frontera eficiente, curva concava en el plano riesgo vs retorno, donde cada punto tiene asociado un portafolio en forma de vector conteniendo los pesos de cada activo.

Visualizar resultados

La etapa final del proceso de optimización de portafolio consiste en presentar los resultados obtenidos en manera sencilla y concisa. En ese sentido, se tiene el gráfico con la frontera eficiente en el plano riesgo vs retorno donde se destaca el

portafolio óptimo que es el punto donde existe el menor riesgo y mayor retorno.

Es importante conocer que riesgo y que retorno maneja el portafolio óptimo pero un inversor prefiere conocer el portafolio en sí, es decir las proporciones en las que debe dividir su capital en cada activo para lograr esta efectividad. Por eso, se presenta además una tabla con estos datos.

3.2. Optimización de portafolios en MATLAB®

3.2.1. Conjuntos de Herramientas o *Toolboxes*

Conjunto de Herramientas Econométricas

El Conjunto de Herramientas Econométricas provee de funciones para modelar data financieras. Por ejemplo, se pueden estimar modelos económicos de predicción y realizar análisis completo de series de tiempo. [MathWorks, 2018]

Entre estas funciones están las de optimización que permiten resolver problemas de minimización o maximización, según sea el caso. Están insertadas dentro de funciones más generales en MATLAB® y por lo general son de código cerrado.

Conjunto de Herramientas Financieras

El Conjunto de Herramientas Financieras de MATLAB® cuenta con tres objetos para resolver tipos específicos de problemas de optimización de portafolio:

- El objeto **Portfolio** que usa para la optimización de portafolio media-varianza o de Markowitz.
- El objeto **PortfolioCVaR** para implementar la optimización de valor condicional CVaR.
- El objeto **PortfolioMAD** que implementa la optimización *Mean Absolute Deviation* [2]

MATLAB® y el Conjunto de Herramientas Financieras proveen un ambiente de computación integrado completo para el análisis financiero e ingeniería. Esta herramienta tiene todo lo necesario para realizar análisis estadístico y matemático

[2] Desviación de Media Absoluta

de data financiera y mostrar los resultados en gráficos con calidad de presentación. [MathWorks, 2012]

3.2.2. Crear portafolio

Objeto Portafolio

El objeto Portafolio implementa la optimización media-varianza. Cada propiedad y método de este objeto se encuentra en los Apéndices. Este objeto tiene o bien los retornos de portafolio brutos o netos como indicador de retorno y la varianza de retornos de portafolio como el indicador de riesgo.

Se construye el portafolio con la información de cada activo que lo compone, se ingresa la data de los retornos y riesgos en forma de vector y matriz, respectivamente. Estos son el vector de retorno esperado y la matriz de covarianza. El vector de retorno esperado contiene el retorno esperado promedio para cada activo en el portafolio mientras que la matriz de covarianza es una matriz cuadrada que representa las relaciones entre cada par de activos. Esta información se especifica directamente pero también se puede estimar de la serie de retornos históricos.

Primero se tiene un portafolio inicial eficiente que puede ser, por ejemplo, el portafolio $\frac{1}{N}$. Para realizar la comparación se crea un nuevo objeto Portafolio con los costos de transacción y definiendo al portafolio $\frac{1}{N}$ como portafolio inicial, estos portafolios presentan un comportamiento diferente como podemos ver en su frontera eficiente y región feasible.

Cuando se ingresan los datos y se imprimen las propiedades en el objeto Portafolio, el siguiente paso consta de graficar la frontera eficiente usando los diferentes activos. Para una mejor visualización de esta frontera se recomienda usar 10 portafolios espaciados como mínimo. El objeto Portafolio permite extraer los valores de cada uno de los portafolios que componen la frontera eficiente, según la cantidad de activos que se ordene, estos datos se registran en forma de filas y cada uno de los riesgos, retornos y pesos asociados de portafolios se identifican como las correspondientes filas en los vectores y matrices.

Este conjunto de herramientas proveen al usuario un conjunto amplio de programas para el análisis del desempeño de una inversión, asignación de activos y evaluación de riesgo, entre otras actividades.

3.2.3. Configurar el Portafolio

La función *setAssetMoments*

Configura los momentos (media y covarianza) de los retornos de activos en forma de vector y matriz, respectivamente. Se ingresan tanto el objeto Portafolio como la media representada por la propiedad $AssetMean$, la covarianza representada por $AssetCovar$ y adicionalmente el número de activos que se guarda en $NumAssets$. El resultado que obtenemos es el portafolio actualizado.

La matriz $AssetCovar$ debe ser una matriz semidefinida positiva simétrica. Si $AssetMean$ es un escalar y no se ingresa el número de activos o es imposible determinarlo, la función asumirá que se trata de un único activo. De manera similar, si $AssetCovar$ es un escalar y no se conoce el número de activos, la función formará una matriz diagonal con el valor escalar en la diagonal y si no es posible determinar el número de activos se asumirá que es 1.

La función *setDefaultConstraints*

Esta función configura la restricción de que los pesos del portafolio son no negativos y deben sumar la unidad. Las entradas son el objeto Portafolio y adicionalmente el número de activos en el mismo, mientras que la salida es el Portafolio actualizado.

Un conjunto de portafolio *por defecto* tiene una cota inferior 0 y el presupuesto igual a 1, es decir, los pesos deben sumar la unidad y ser todos no negativos. El valor para el número de activos $NumAssets$ es 1 si no se ingresa en la función. Este método no modifica restricciones existentes en el objeto Portafolio más que las restricciones de límite y de presupuesto, en caso de que exista alguna se elimina su valor.

3.2.4. Opimización de Portafolio

La función estimateFrontier

La función *estimateFrontier*, como su nombre dice, estima un número de portafolios eficientes (óptimos) que se encuentran en la frontera eficiente. Es decir, grafica la frontera eficiente según el número de portafolios que indiquemos.

Los *inputs* son el objeto Portafolio y el número de portafolios $NumPorts$ con el que se dará forma a la frontera eficiente. Las salidas u *outputs* son:

- $pwgt$ son los portafolios óptimos en la frontera eficiente con el número indicado, igualmente separados desde el retorno de portafolio mínimo al máximo.
- $pbuy$ son las compras relativas al portafolio inicial para portafolios óptimos en la frontera eficiente.
- $psell$ son las ventas relativas al portafolio inicial para portafolios óptimos en la frontera eficiente.

Todas las salidas son matrices con dimensiones del número de activos $\times$ el número de portafolios.

Si no se asigna un valor a $NumPorts$, el valor por defecto es 10, el cual es una propiedad oculta del objeto Portafolio $defaultNumPorts$ y si $NumPorts = 1$ entonces el método devuelve el portafolio especificado por la propiedad oculta $defaultFrontierLimit$. En caso que no se especifique un portafolio inicial, se asume que es 0 de modo que $pbuy = \max(0, pwgt)$ y $psell = \max(0, -pwgt)$.

La función estimatePortMoments

Esta función calcula los retornos y riesgos del portafolio. Las entradas son el objeto Portafolio y $pwgt$ conjunto de pesos de portafolio en forma de matriz con dimensiones $NumAssets \times NumPorts$ y las salidas son:

- **prsk -** Estima las desviaciones estándar de retornos de portafolios para cada portafolio de $pwgt$.
- **pret -** Esstima las medias de retornos de portafolio para cada portafolio de $pwgt$.

Ambos son vectores y tienen dimensión del número de portafolios con los que se trabaja la frontera eficiente.

La función $pstd$ permite calcular la desviación estándar (en forma de vector) de los retornos de portafolio usando la matriz de pesos de portafolio y la matriz de covarianza.

Análogamente, tenemos la función $pret$ para hallar el vector de la media estimada de los retornos de portafolio. También usa la matriz de pesos como entrada además de el vector de la media de retornos totales de activos. Son entradas opcionales los costos de transacción de compra y venta, y de no indicarse se asume que son 0.

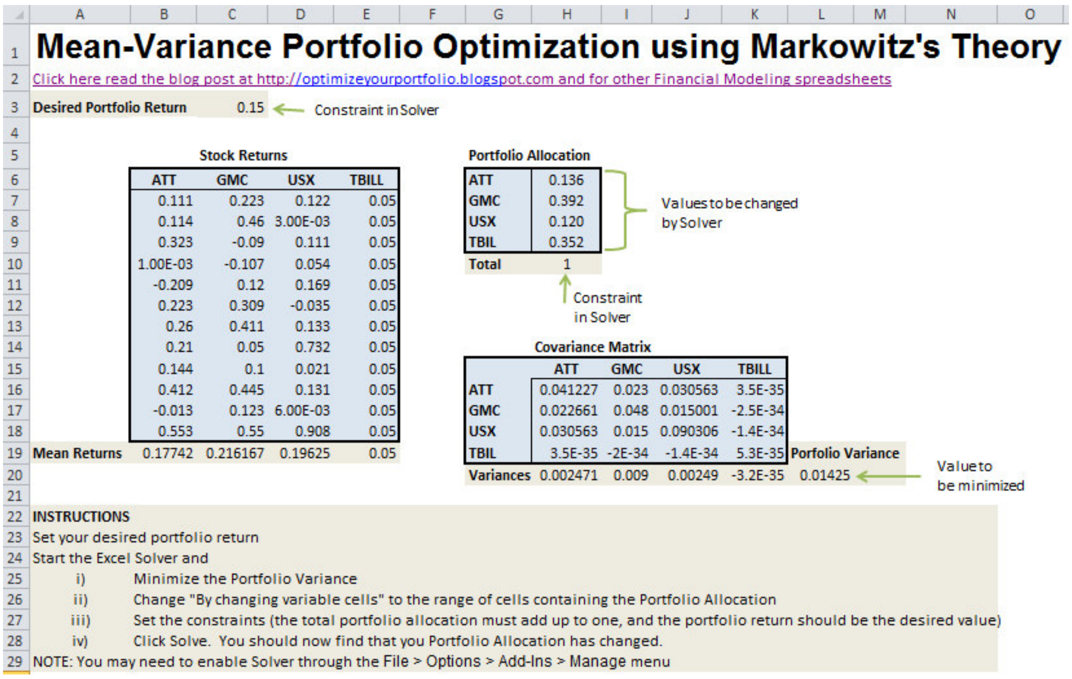
3.3. Planteamiento del Problema

Supongamos el caso de una persona que desea invertir su capital en acciones de cinco compañías tecnológicas que comercian en el mercado bursátil norteamericano (Facebook, IBM, Irobot, Microsoft, Tesla) y desea conocer cuánto y en qué acciones invertir para maximizar su ganancia. Nuestro inversionista asegura además haber leído sobre costos de transacción y desea conocer como afectaría la solución a su problema.

3.3.1. Solución al Problema

Lo que busca el inversor es optimizar su portafolio, es decir, encontrar el portafolio que minimize su riesgo de pérdida y además le ofrezca un nivel aceptable de retorno.

Este portafolio óptimo se encuentra en la frontera eficiente que es la solución al problema de Markowitz.


Mean-Variance Portfolio Optimization using Markowitz's Theory

Click here read the blog post at http://optimizeyourportfolio.blogspot.com and for other Financial Modeling spreadsheets

Desired Portfolio Return 0.15 Constraint in Solver

Stock Returns

ATT	GMC	USX	TBILL
0.111	0.223	0.122	0.05
0.114	0.46	3.00E-03	0.05
0.323	-0.09	0.111	0.05
1.00E-03	-0.107	0.054	0.05
-0.209	0.12	0.169	0.05
0.223	0.309	-0.035	0.05
0.26	0.411	0.133	0.05
0.21	0.05	0.732	0.05
0.144	0.1	0.021	0.05
0.412	0.445	0.131	0.05
-0.013	0.123	6.00E-03	0.05
0.553	0.55	0.908	0.05
Mean Returns 0.17742	0.216167	0.19625	0.05

Portfolio Allocation

ATT	0.136
GMC	0.392
USX	0.120
TBIL	0.352
Total	1

Values to be changed by Solver

Constraint in Solver

Covariance Matrix

	ATT	GMC	USX	TBILL
ATT	0.041227	0.023	0.030563	3.5E-35
GMC	0.022661	0.048	0.015001	-2.5E-34
USX	0.030563	0.015	0.090306	-1.4E-34
TBIL	3.5E-35	-2E-34	-1.4E-34	5.3E-35
Variances	0.002471	0.009	0.00249	-3.2E-35

Porfolio Variance 0.01425 Value to be minimized

INSTRUCTIONS
Set your desired portfolio return
Start the Excel Solver and
i) Minimize the Portfolio Variance
ii) Change "By changing variable cells" to the range of cells containing the Portfolio Allocation
iii) Set the constraints (the total portfolio allocation must add up to one, and the portfolio return should be the desired value)
iv) Click Solve. You should now find that you Portfolio Allocation has changed.
NOTE: You may need to enable Solver through the File > Options > Add-Ins > Manage menu

Figura 3.5: Optimización de Portafolios Media-Varianza usando la teoría de Markowitz, implementado en una hoja de cálculo de Microsoft Excel.

Las soluciones pueden ser implementadas en hojas de cálculo de Microsoft Excel [InvestExcel, 2013] o en software de pago específico para resolver problemas de optimización como $CPLEX$ de $AMPL$ [Woodside, 2011]. También se ha desarrollado programas para solucionar problemas de optimización específicamente usando MATLAB®, tales son los casos de *SOCP* [Lobo et al., 2007] y MOSEK [Andersen et al., 2012].

Este trabajo se enfoca mayormente en el aspecto gráfico del análisis media-varianza para resaltar los resultados obtenidos, a través de una interfaz amigable y sencilla de usar que simplifique el proceso de ingresar la data y la selección del portafolio eficiente. Para ello se emplean funciones de las Herramientas Financieras (Financial Tooolbox™) y el ambiente de desarrollo de interfaces gráficas (GUIDE) de MATLAB®, se contruye la interfaz de usuario que permite al usuario interactuar con el programa de manera directa escogiendo la cantidad de activos y el número de portafolios óptimos que desea para la frontera eficiente además de los costos de transacción proporcionales en caso desee trabajar con ellos.

El programa no tiene un límite establecido para la cantidad de activos o el número de portafolios que grafican la frontera eficiente, pero para el ejemplo principal se usan los precios históricos de los activos de cinco compañías y 20 portafolios para formar la frontera eficiente.

3.4. Procesamiento de data

Precios Históricos

Los datos son obtenidos en forma gratuita a través del sitio web *YAHOO! Finances* que a su vez muestra precios históricos de la bolsa de valores electrónica estadounidense *NASDAQ* como se muestra en la Figura 3.6.

La interfaz gráfica está diseñada para automatizar el proceso de selección de portafolio, de manera que el usuario únicamente debe contar con la data descargada desde *YAHOO! Finances* en formato CSV en una hoja de cálculo de Microsoft Excel.

El intervalo elegido para el análisis comprende los últimos 5 años entre 2013 y 2018 en una frecuencia mensual, obtenido el periodo 01/01/2013 - 01/12/2018 que resultan en 60 precios históricos.

Retornos de activos

Luego de formar la matriz que contiene los precios de todos los activos, el comando *price2ret* de MATLAB® permite obtener la matriz de retorno de dimensión $(A-1)\times B$, donde A representa las filas de la matriz de precios y B las columnas.

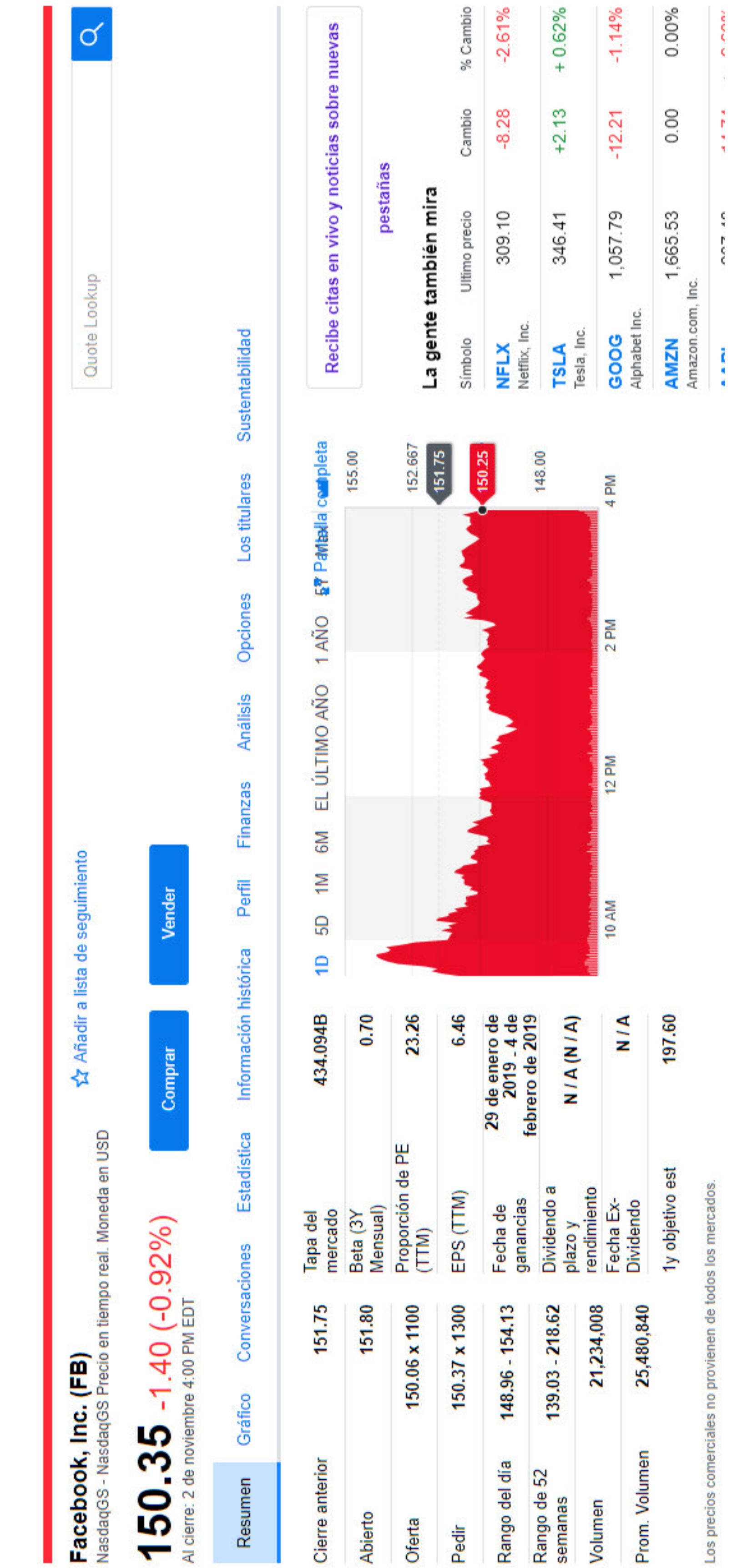


Figura 3.6: Resumen de la compañía Facebook en Yahoo! Finances

Figura 3.7: Historial de precios de los activos de Facebook en Yahoo! Finances

Capítulo 4

Implementación Computacional

En este capítulo se desarrolla la implementación en el software MATLAB® del programa que resuelve el problema de optimización de portafolio usando el modelo de Markowitz, adicionalmente se resuelve el mismo problema incluyendo los costos de transacción. Para esto se hace uso de las Herramientas Financieras y Herramientas Econométricas de MATLAB, así como las funciones matemáticas aprendidas en los cursos de Métodos Numéricos y Programación, y Seminario de Tesis.

MATLAB® es un lenguaje de alto nivel con un entorno interactivo para computación numérica, visualización y programación. Con ayuda de este software podremos analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos y aplicaciones en un menor tiempo computacional que lenguajes de programación tradicionales (C, C++, Java).

GUIDE es el entorno desarrollado de interfaces gráficas de usuario (*GUI* por sus siglas en inglés) de MATLAB®, posee un conjunto de herramientas que simplican su diseño y programación mediante el estilo *drag and drop* aplicado a paneles, botones, cuadros de texto, etc.

4.1. Diseño de Interfaces

Para implementar las Herramientas Financieras y algoritmos para procesar la data utilizamos **MATLAB® R2018a**, ya que nos brinda un entorno amigable para el desarrollo de interfaces de usuario denominada GUIDE.

El código fuente de la interfaz terminada la podemos encontrar al final del trabajo en la sección de Anexos.

4.1.1. Ventana Principal

La interfaz principal es una ventana pequeña y sencilla, los datos que se ingresan o *inputs* son el número de activos, el número de portafolios (que conforman la frontera eficiente), los costos de transacción y un retorno/riesgo fijo para que el programa calcule el riesgo/retorno correspondiete.

Una vez que se ingresa el número de activos, el botón **Examinar** se abrirá tanto como el número de activos para seleccionar los archivos CSV que contienen los datos de las acciones de estas compañías.

Se guarda en el programa la cantidad presente en el recuadro 'Número de activos', esta cantidad será el número de veces que se ejecute la acción del botón *Examinar*, el cual abre un explorador de archivos que busca específicamente archivos en formato CSV. Estos archivos deben estar guardados en la misma carpeta que se desarrolla el programa.

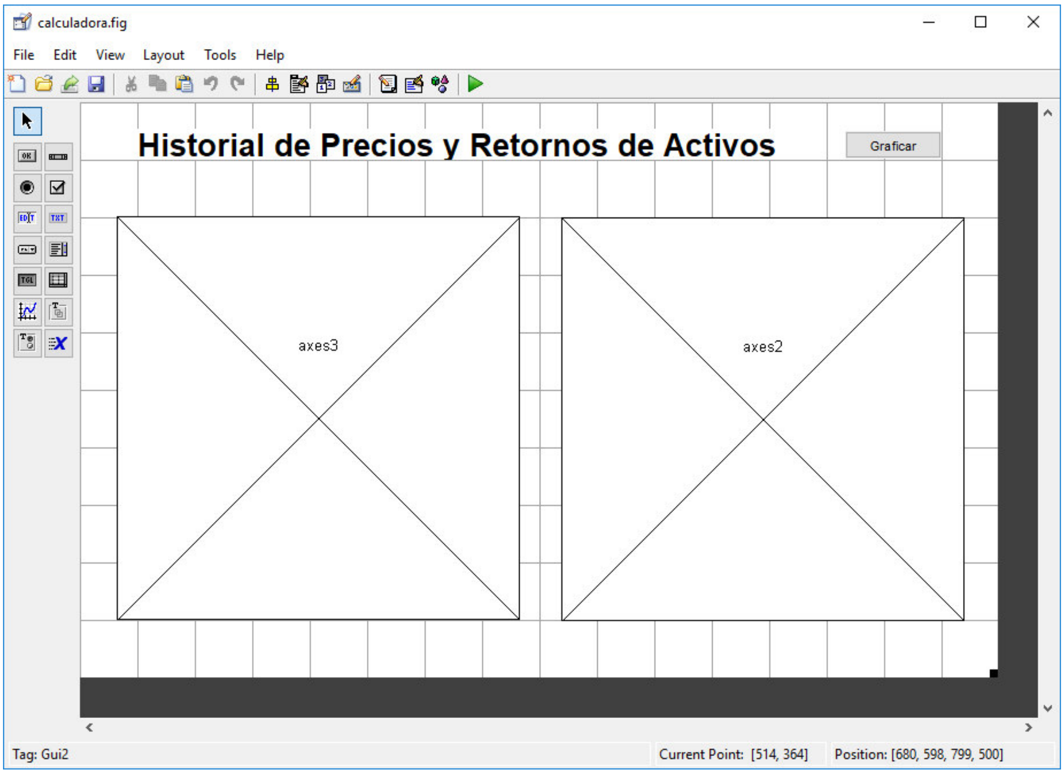


Figura 4.1: Interfaz secundaria 'Ver Activos' - MATLAB®

La tabla 'Activos' se llenará automáticamente con las siglas de las compañías dueñas de las acciones. Con estos datos se puede abrir la ventana secundaria 'Ver Activos' presionando el botón en la derecha, para graficar el desempeño histórico de los precios de las acciones y sus retornos para el periodo de tiempo dado. En caso que el número se presione 'Examinar' sin haber asignado un número de activos, aparacerá un mensaje de error indicando que repita el proceso esta vez de manera correcta. Si el programa detecta que se seleccionó el mismo archivo más de una vez, se muestra un mensaje de error indicando que repita el proceso nuevamente.

El siguiente paso es establecer el número de portafolios óptimos que conforman la frontera eficiente y guardarlos en el programa presionando el botón con símbolo de flecha. Para obtener la solución al problema de Markowitz, se implementan las opciones de maximizar el retorno o minimizar el riesgo.

Una vez que se cuente con estos datos, el botón **Resolver**, como su nombre dice, encontrará la solución según el modelo de Markowitz. Este botón es responsable de procesar los archivos CSV, extraer la columna principal y acomodarlos en una matriz general de retornos, obtiene su media y desviación estándar así como la matriz de covarianza.

También crea el portafolio usando las Herramientas Financieras, le asigna los valores hallados anteriormente. Por defecto, asigna la restricción de presupuesto, es decir, que los pesos de acciones deben sumar uno y que sean mayores o iguales a cero (restricción de ventas en corto).

Si se usa la opción de 'Retorno máximo', el programa encuentra el portafolio que presenta mayor valor de retorno potencial en la frontera eficiente y selecciona los pesos de cada activo en este portafolio, colocandolos luego en la tabla 'Pesos' al lado derecho de la tabla 'Activos'.

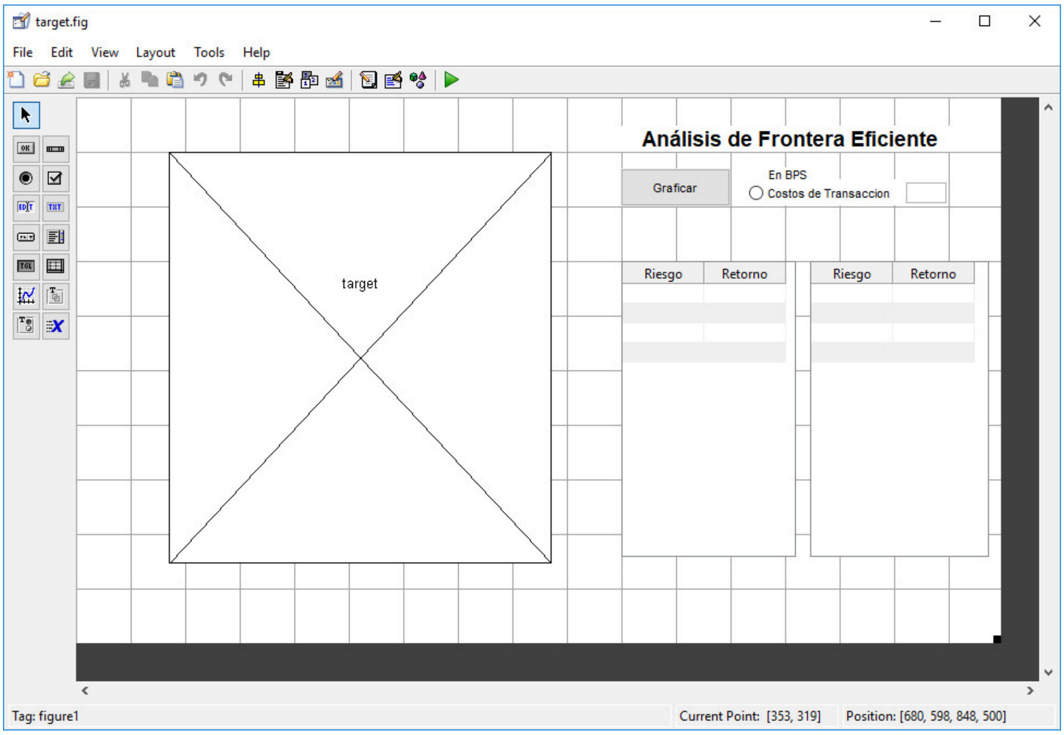


Figura 4.2: Interfaz secundaria 'Frontera Eficiente' - MATLAB

Con estos nuevos datos ingresados, es posible ahora observar la frontera eficiente y conocer las coordenadas de cada portafolio que la conforma, para ello se usa la segunda ventana secundaria 'Frontera Eficiente' a la cual se puede acceder presionando el botón con símbolo de flecha al lado superior derecho de la interfaz principal.

Ahora es el turno de analizar el efecto de los costos de transacción, para ello se ingresa en el cuadro de texto del panel 'Costos de Transacción' la cantidad (en puntos base) de los costos de transacción proporcionales para compra y venta. Después solo se necesita presionar el botón **Aplicar** para obtener los nuevos pesos del modelo de Markowitz que incluye los costos de transacción en su solución. Este resultado se guardará en la tabla 'Pesos CT' ubicada al lado de derecho de la tabla 'Pesos' para facilitar la comparación entre ambos resultados.

4.1.2. Ventana Secundaria: Ver Activos

En esta ventana se observa el comportamiento de los precios de las acciones a lo largo del intervalo de la data histórica.

El diseño consta de dos planos de coordenadas, tiempo versus precio (en dólares), para graficar los precios históricos de los precios de activos y un botón para graficar.

La data es leída desde los mismos archivos CSV, y los retornos de la matriz formada por el programa.

4.1.3. Ventana Secundaria: Frontera Eficiente

Esta ventana está formada por un plano de coordenadas, un cuadro de texto para ingresar costos de transacción y dos tablas para las coordenadas de la frontera eficiente inicial y la frontera eficiente cuando se incluyen los costos de transacción.

En este caso, los costos de transacción también son proporcionales y son el mismo para compra y venta.

Ambas gráficas se superponen en el plano para distinguir los puntos mínimos y máximos de la curva.

4.2. Creación de Interfaces

4.2.1. Ventana Principal

La interfaz principal es titulada 'Programa para Asignación de Activos' y es donde el usuario selecciona los archivos de los pesos históricos de los activos a través del botón **Examinar**, ingresa manualmente la cantidad de portafolios con los que se forma la frontera eficiente, calcula los pesos para cualquier retorno o riesgo en el rango de portafolios óptimos.

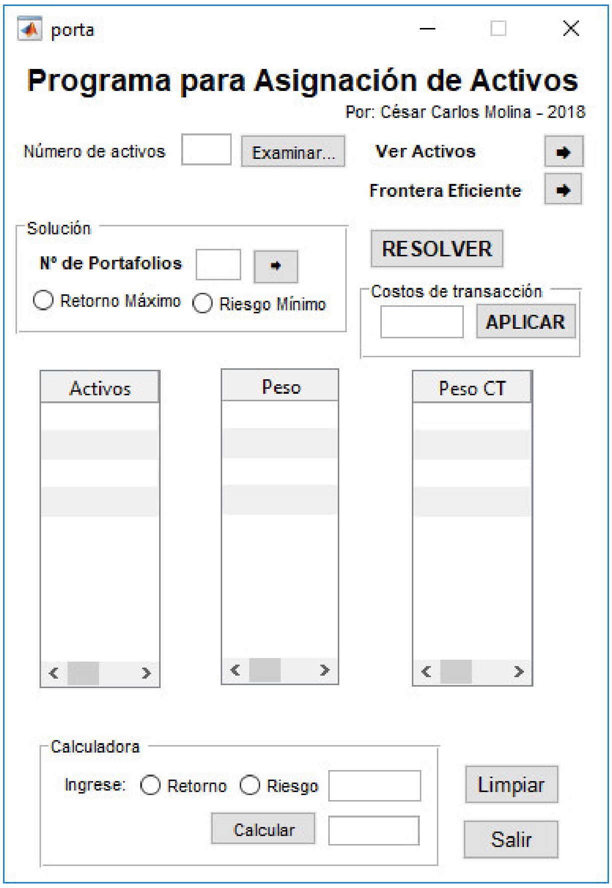


Figura 4.3: Interfaz principal diseñada en GUIDE

Como se mencionó anteriormente, el programa lee cada archivo de los activos y toma el precio *Adj. Close* en cada uno de ellos para formar una matriz, obtener la media y varianza de cada activo (columnas).

Después de ingresar estos datos, podemos acceder a las ventanas secundarias para ver el comportamiento del precio de los activos y sus retornos o ver la frontera eficiente y comparar los casos con costos de transacción y sin ellos.

Como se ve en la figura 4.4, la primera tabla se llena con el nombre o siglas de cada activo y la tabla adyacente es para los pesos del portafolio óptimo con el menor riesgo o el mayor retorno (según se haya elegido previamente).

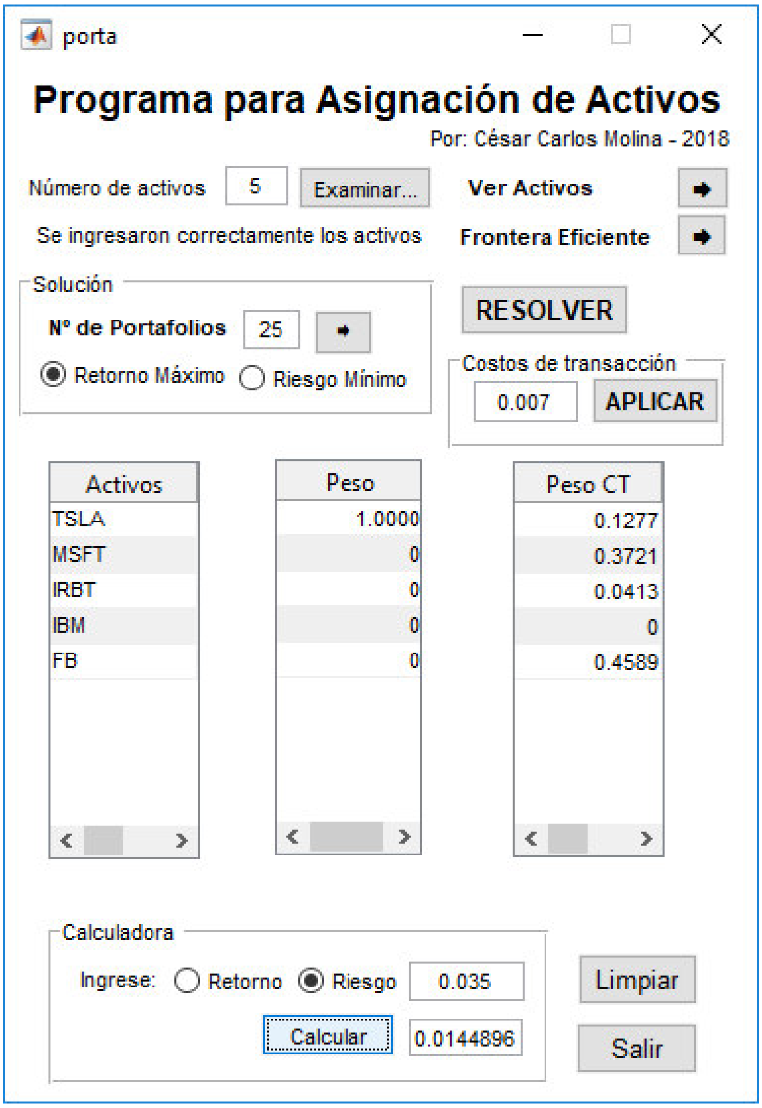


Figura 4.4: Interfaz principal con los datos ingresados y pesos asignados, con y sin costos de transacción.

4.2.2. Ventana Secundaria: Datos de Activos

Muestra el comportamiendo de los activos y sus retornos a lo largo de los últimos 6 años con frecuenta mensual.

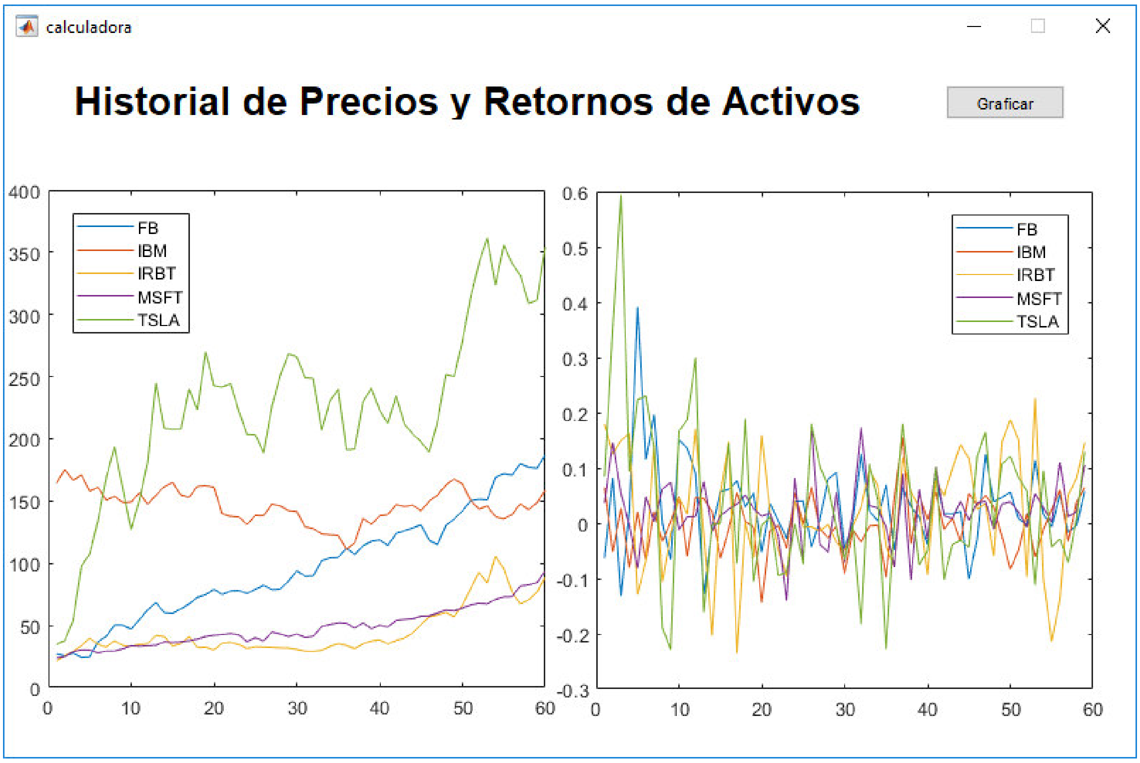


Figura 4.5: Ventana de los gráficos de los precios y retornos de activos.

4.2.3. Ventana Secundaria: Frontera Eficiente

Muestra las coordenadas para cada portafolio que conforma la frontera eficiente, cuya cantidad se ingresó en la ventana principal.

Cuenta con la opción de agregar costos de transacción y que se pueda graficar esta nueva frontera eficiente en las coordenadas ubicadas en la parte izquierda junto a la frontera eficiente de la solución inicial (sin costos de transacción) para comparar. También se muestran las coordenadas de esta nueva curva en la tabla adicional al lado derecho.

4.3. Programa para la Optimización Media-Varianza

La interfaz principal permite al usuario ingresar la cantidad de compañías cuyas acciones formarán su portafolio objetivo. Cuando el programa lee esta información, se abrirá la ventana de seleccionar archivos tantas veces como compañías se escogió para ingresar la data histórica de estas compañías, almacenada en archivos CSV provistos por NASDAQ y Yahoo! Finances.

Luego, se especifica la cantidad de portafolios que desea formar la frontera

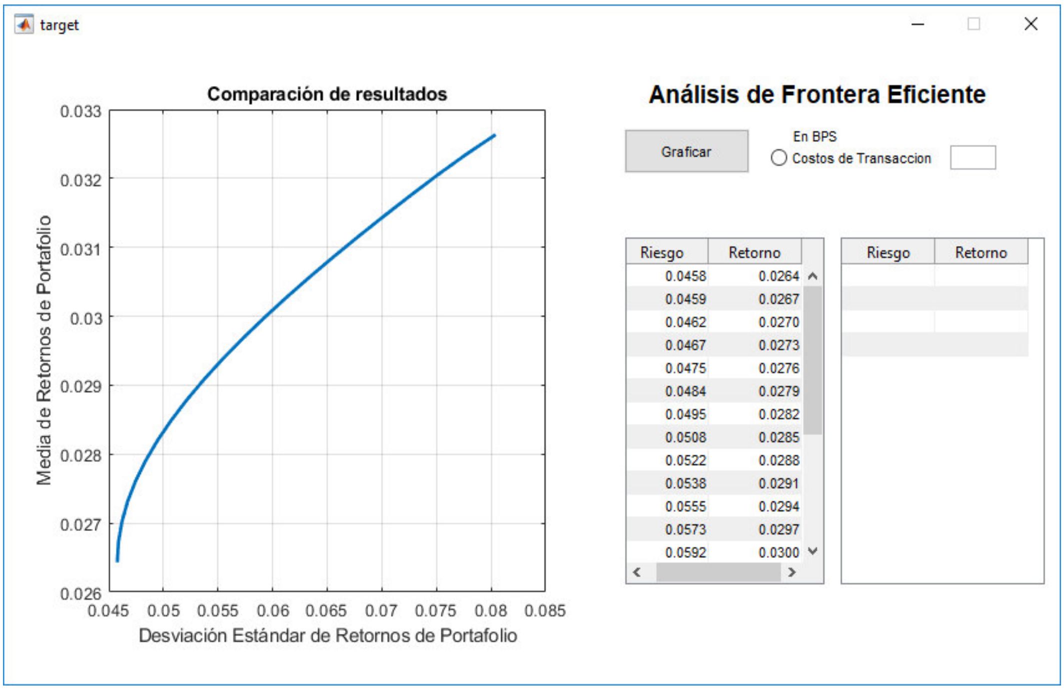
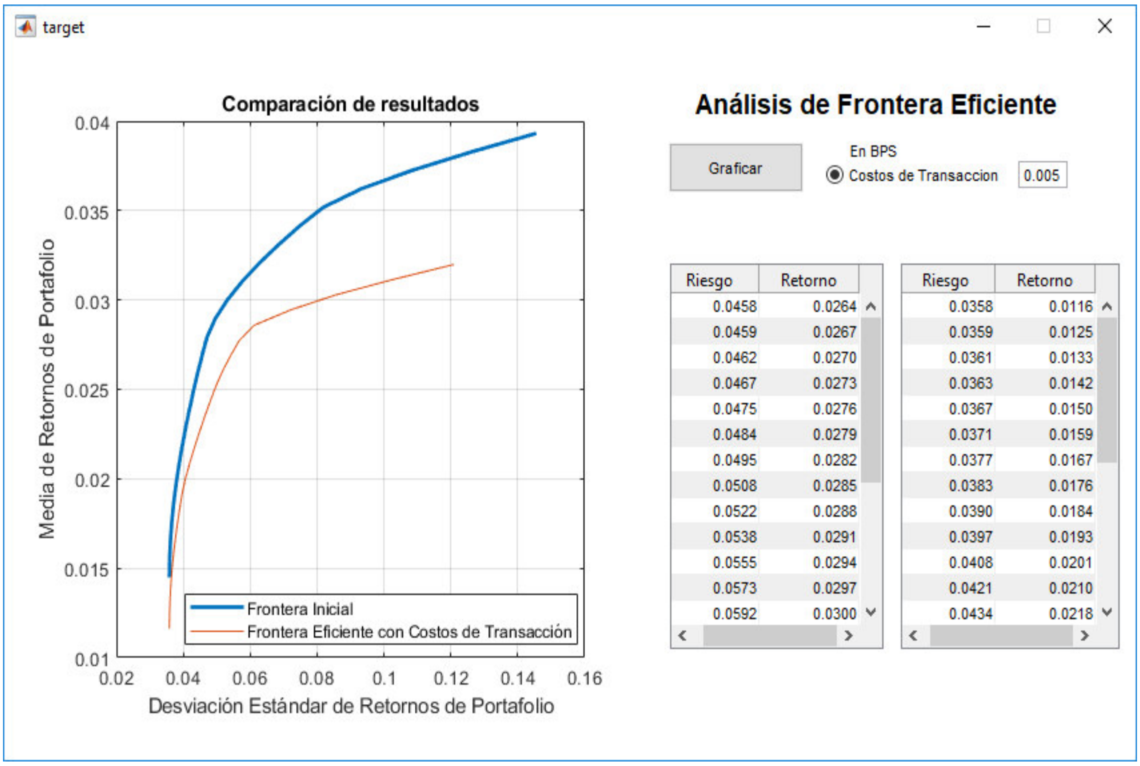


Figura 4.6: Ventana para la frontera eficiente y sus coordenadas

eficiente (20 para el caso ejemplo de la tesis). Opcionalmente, se asignan los costos de transacción proporcionales para realizar el análisis y comparación. También existe un recuadro para ingresar el retorno y/o riesgo predeterminado en caso sean necesarios.

Los primeros datos a obtener cuando el programa se active son la lista de activos (nombres de las compañías), pesos de activos que conforman el portafolio inicial y los pesos de activos ante costos de transacción. El programa también provee gráficos con el historial de pesos de activos y la frontera eficiente.

Se ordenan los datos de la frontera eficiente en una tabla de coordenadas que facilita el análisis y comparación entre un portafolio inicial $1/N$ y el nuevo portafolio con costos de transacción proporcionales.



Riesgo	Retorno
0.0458	0.0264
0.0459	0.0267
0.0462	0.0270
0.0467	0.0273
0.0475	0.0276
0.0484	0.0279
0.0495	0.0282
0.0508	0.0285
0.0522	0.0288
0.0538	0.0291
0.0555	0.0294
0.0573	0.0297
0.0592	0.0300

Riesgo	Retorno
0.0358	0.0116
0.0359	0.0125
0.0361	0.0133
0.0363	0.0142
0.0367	0.0150
0.0371	0.0159
0.0377	0.0167
0.0383	0.0176
0.0390	0.0184
0.0397	0.0193
0.0408	0.0201
0.0421	0.0210
0.0434	0.0218

Figura 4.7: Ventana para la frontera eficiente con costos de transacción 0.005 bps

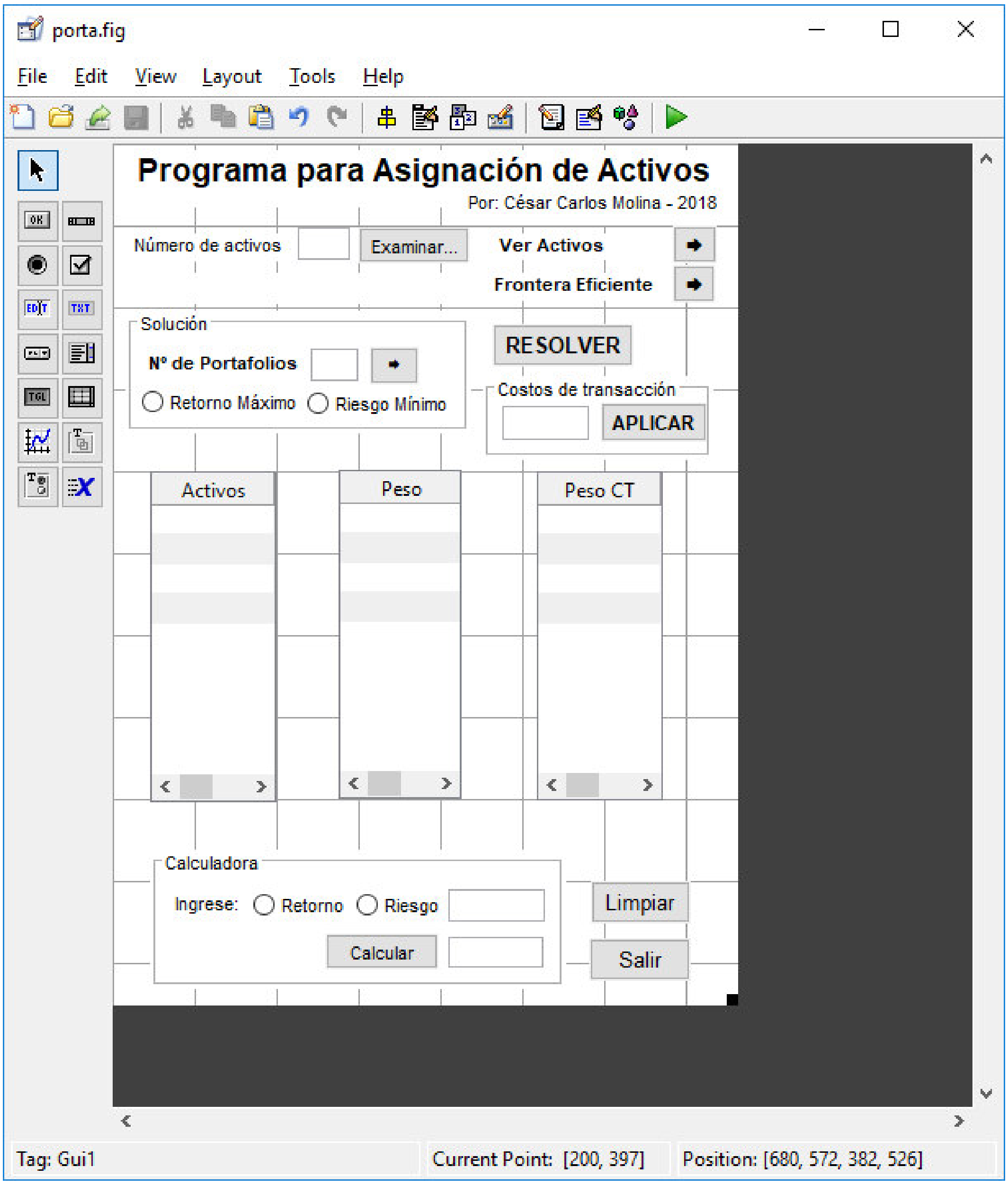


Figura 4.8: Desarrollo de la interfaz principal en el ambiente GUIDE - MATLAB® R2018a

Capítulo 5

Resultados

Mediante la aplicación del programa desarrollado en MATLAB® para resolver el problema de Markowitz para la asignación de activos que incluye los costos de transacción en el caso ejemplo que toma acciones del mercado financiero tecnológico, se conduce un análisis de los portafolios eficientes obtenidos con dicho modelo. Del total del número de activos comerciados en la bolsa de valores electrónica estadounidense NASDAQ, se tomó una muestra de cinco compañías de amplio reconocimiento como Facebook (FB), International Business Machines (IBM), iRobot (IRBT), Microsoft (MSFT) y Tesla (TSLA) en el periodo entre 2013 y 2018 en intervalo mensual. Para cada activo se toma como referencia el precio de cierre del primer día de cada mes (01/02/2013 hasta 01/12/2017).

Primero se calcula la frontera eficiente usando el modelo de Markowitz con los retornos de los precios que hemos obtenido de NASDAQ. La frontera eficiente obtenida se puede observar en la figura 5.1 y los detalles de los portafolios que lo conforman en la tabla 5.1.

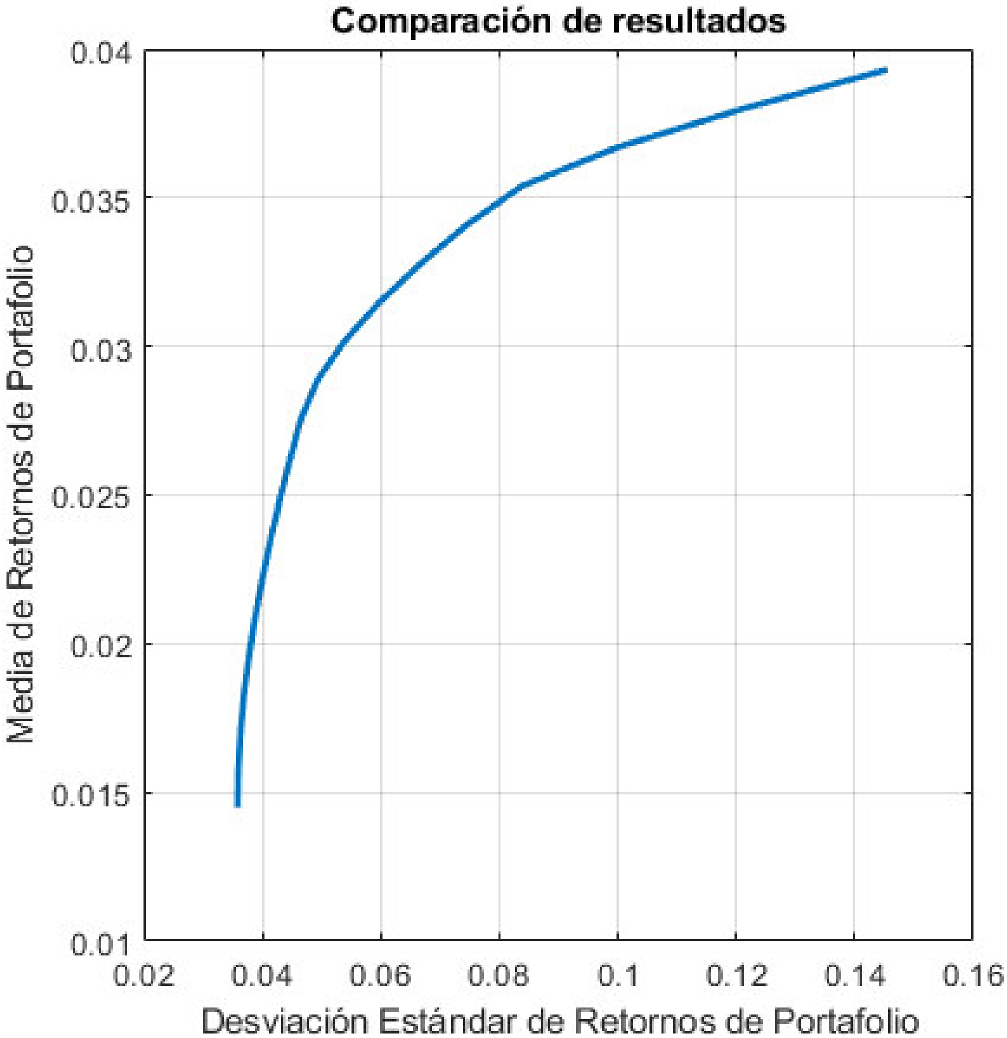


Figura 5.1: Frontera eficiente a la fecha 01/12/2017

FB	IBM	IRBT	MSFT	TSLA	E(R)	σ
0.2159	0.4544	0.1137	0.2161	0	0.0145	0.0358
0.2353	0.4070	0.1131	0.2445	0	0.0158	0.036
0.2548	0.3597	0.1126	0.2729	0	0.0171	0.0364
0.2742	0.3124	0.1121	0.3013	0	0.0184	0.037
0.2937	0.2651	0.1116	0.3297	0	0.0197	0.0379
0.3093	0.2202	0.1083	0.3562	0.0060	0.021	0.0389
0.3234	0.1763	0.1040	0.3819	0.0144	0.0223	0.0402
0.3376	0.1324	0.0997	0.4076	0.0227	0.0236	0.0416
0.3517	0.0885	0.0953	0.4334	0.0310	0.0249	0.0431
0.3659	0.0446	0.0910	0.4591	0.0394	0.0262	0.0448
0.3800	0.0007	0.0867	0.4848	0.0477	0.0276	0.0465
0.4308	0	0.0575	0.4126	0.0991	0.0289	0.0493
0.4821	0	0.0279	0.3388	0.1512	0.0302	0.0538
0.5335	0	0	0.2633	0.2031	0.0315	0.0597
0.5880	0	0	0.1604	0.2516	0.0328	0.0667
0.6424	0	0	0.0575	0.3000	0.0341	0.0745
0.5867	0	0	0	0.4133	0.0354	0.0838
0.3911	0	0	0	0.6089	0.0367	0.1
0.1956	0	0	0	0.8044	0.038	0.1213
0	0	0	0	1.0000	0.0393	0.1455

Cuadro 5.1: Portafolios eficientes sin costos de transacción.

Para la inclusión de costos de transacción, se usa el mismo valor para compra y venta para cada activo y además este valor es proporcional. Se usarán los costos 0.003, 0.006 y 0.009 para evaluar la forma de la nueva frontera eficiente reflejadas en las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 respectivamente.

La primera fila de las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 representan el portafolio de riesgo mínimo cuando el modelo de Markowitz incluye costos de transacción 0.003 o 0.3 %, 0.6 % y 0.9 %

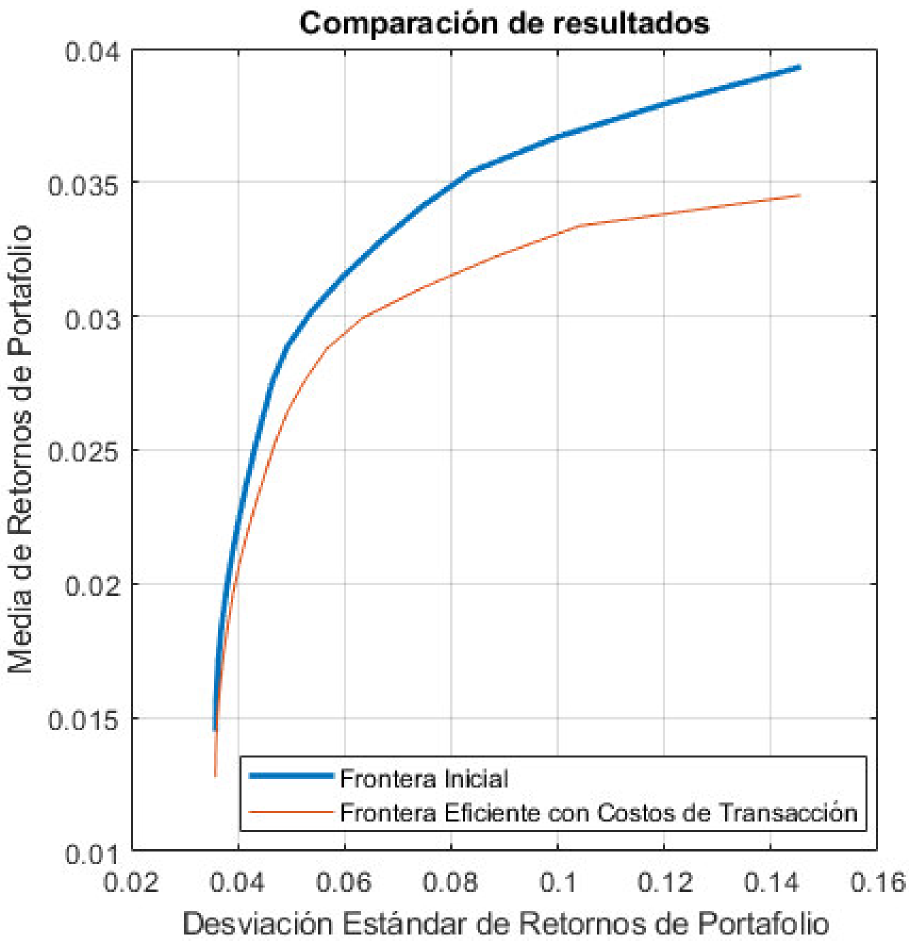


Figura 5.2: Frontera eficiente con costos de transacción 0.003 a la fecha 01/12/2017

En los portafolios de bajo riesgo es nula la inversión en el activo Tesla, sin embargo, su presencia es total cuando el portafolio alcanza el retorno esperado máximo. El comportamiento de esta frontera eficiente es similar a su par sin costos de transacción, pero esta diferencia se hace cada vez más notoria según aumentan los costos de transacción y en el área derecha de la frontera que significa los portafolios con mayor nivel de riesgo y retorno.

FB	IBM	IRBT	MSFT	TSLA	E(R)	σ
0.2159	0.4544	0.1137	0.2161	0	0.0128	0.0358
0.2321	0.4134	0.1164	0.2381	0	0.0139	0.0359
0.2483	0.3724	0.1191	0.2601	0	0.0151	0.0362
0.2646	0.3315	0.1218	0.2821	0	0.0162	0.0367
0.2808	0.2905	0.1245	0.3041	0	0.0173	0.0374
0.2936	0.2523	0.1245	0.3245	0.0052	0.0185	0.0382
0.3046	0.2154	0.1230	0.3439	0.0130	0.0196	0.0392
0.3194	0.1837	0.1223	0.3455	0.0291	0.0208	0.0404
0.3334	0.1396	0.1207	0.3665	0.0399	0.219	0.0419
0.3473	0.0954	0.1190	0.3875	0.0508	0.0231	0.0435
0.3613	0.0513	0.1173	0.4084	0.0616	0.0242	0.0453
0.3753	0.0071	0.1157	0.4294	0.0725	0.0254	0.0472
0.3972	0	0.1173	0.3771	0.1083	0.0265	0.0495
0.4206	0	0.1196	0.3107	0.1490	0.0276	0.0528
0.4441	0	0.1219	0.2443	0.1897	0.0288	0.0568
0.4775	0	0.0584	0.2000	0.2640	0.0299	0.0635
0.4584	0	0	0.1534	0.3882	0.0311	0.0749
0.4910	0	0	0.0203	0.4887	0.0322	0.0883
0.3509	0	0	0	0.6491	0.0334	0.1041
0	0	0	0	1.0000	0.0345	0.1455

Cuadro 5.2: Portafolios eficientes obtenidos incluyendo 0.003 costos de transacción.

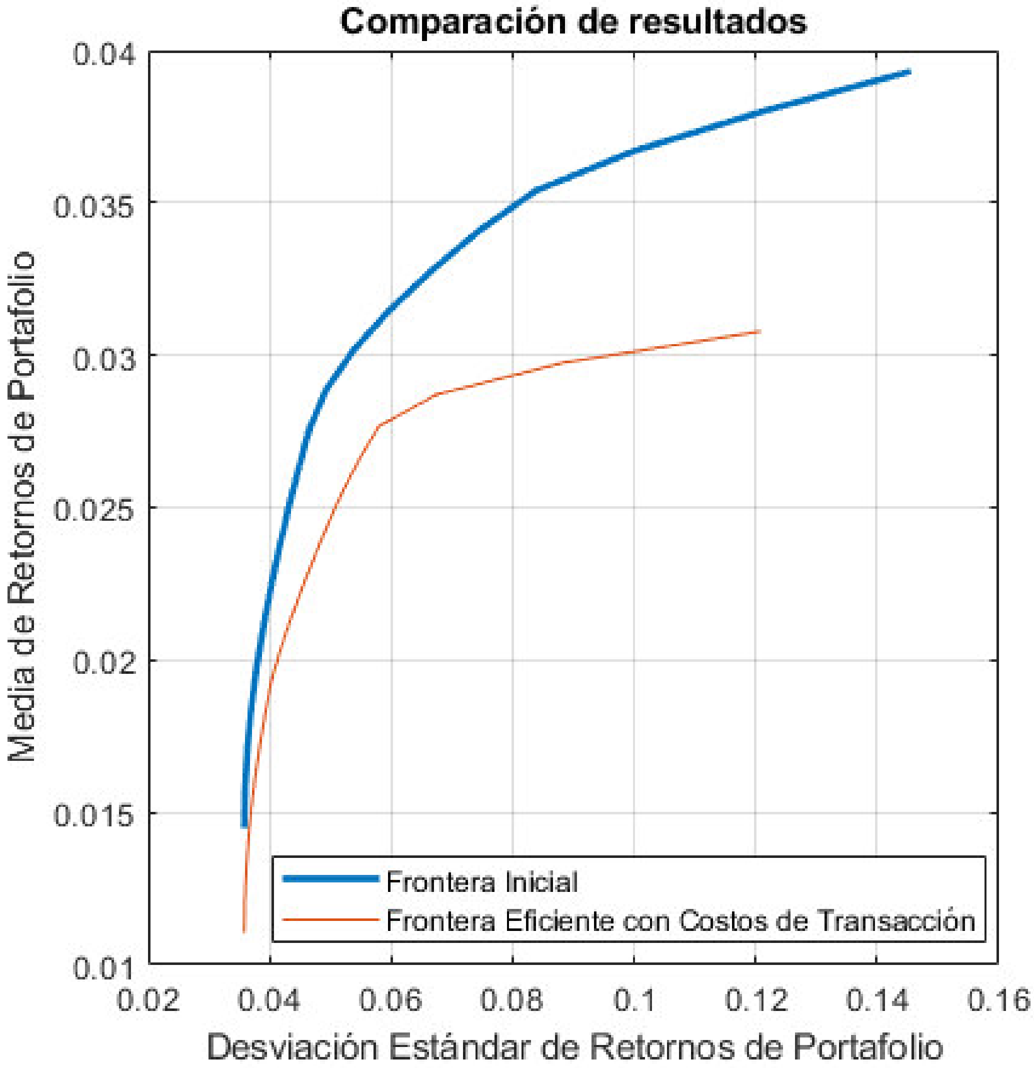


Figura 5.3: Frontera eficiente con costos de transacción 0.006 a la fecha 01/12/2017

FB	IBM	IRBT	MSFT	TSLA	E(R)	σ
0.2159	0.4544	0.1137	0.2161	0	0.0111	0.0358
0.2295	0.4188	0.1188	0.2330	0	0.0121	0.0359
0.2430	0.3833	0.1239	0.2499	0	0.0131	0.0362
0.2566	0.3477	0.1290	0.2667	0	0.0142	0.0365
0.2702	0.3122	0.1341	0.2836	0	0.0152	0.0371
0.2811	0.2789	0.1367	0.2993	0.0040	0.0162	0.0377
0.2896	0.2477	0.1373	0.3140	0.0113	0.0173	0.0385
0.2982	0.2165	0.1379	0.3287	0.0187	0.0183	0.0393
0.3068	0.2000	0.1443	0.3131	0.0358	0.0194	0.0404
0.3173	0.1812	0.1526	0.2914	0.0575	0.0204	0.0419
0.3300	0.1399	0.1553	0.3032	0.0716	0.0214	0.0437
0.3427	0.0986	0.1581	0.3151	0.0856	0.0225	0.0456
0.3554	0.0572	0.1608	0.3269	0.0997	0.0235	0.0476
0.3680	0.0159	0.1636	0.3387	0.1138	0.0246	0.0498
0.3783	0	0.1725	0.3128	0.1364	0.0256	0.0522
0.3869	0	0.1854	0.2633	0.1643	0.0266	0.0549
0.3956	0	0.1983	0.2139	0.1922	0.0277	0.058
0.2870	0	0.2000	0.2000	0.3130	0.0287	0.0674
0.2000	0	0.0684	0.1928	0.5388	0.0297	0.0881
0.2000	0	0	0	0.8000	0.0308	0.1208

Cuadro 5.3: Portafolios eficientes obtenidos incluyendo 0.006 de costos de transacción.

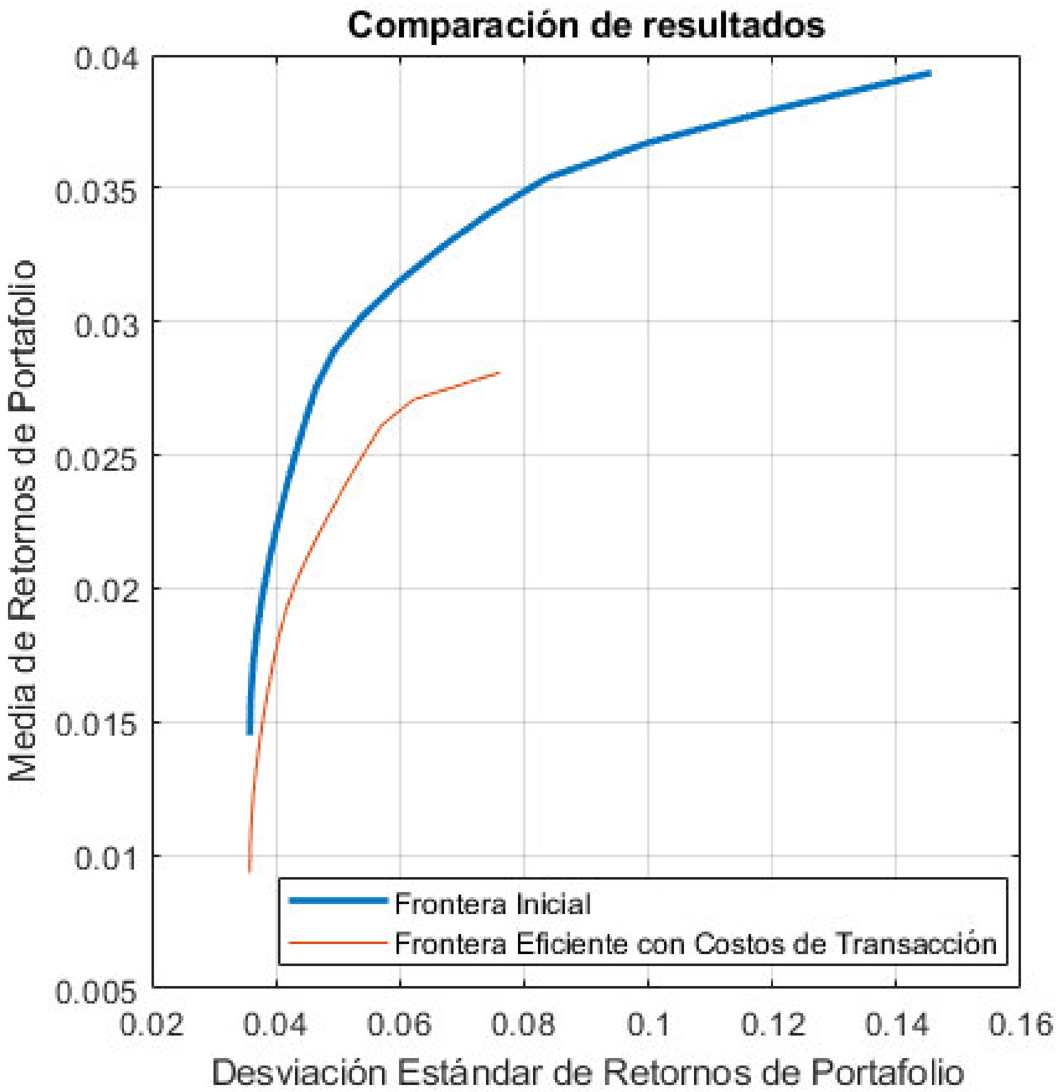


Figura 5.4: Frontera eficiente con costos de transacción 0.009 a la fecha 01/12/2017

FB	IBM	IRBT	MSFT	TSLA	E(R)	σ
0.2159	0.4544	0.1137	0.2161	0	0.0093	0.0358
0.2274	0.4229	0.1206	0.2291	0	0.0103	0.0359
0.2390	0.3915	0.1275	0.2420	0	0.0113	0.0361
0.2505	0.3601	0.1345	0.2550	0	0.0123	0.0364
0.2621	0.3286	0.1414	0.2679	0	0.0133	0.0369
0.2715	0.2991	0.1462	0.2801	0.0031	0.0143	0.0374
0.2783	0.2720	0.1482	0.2913	0.0101	0.0153	0.0381
0.2851	0.2449	0.1502	0.3026	0.0172	0.0162	0.0388
0.2919	0.2178	0.1523	0.3138	0.0242	0.0172	0.0396
0.2973	0.2000	0.1587	0.3084	0.0357	0.0182	0.0405
0.2997	0.2000	0.1736	0.2712	0.0556	0.0192	0.0417
0.3022	0.2000	0.1884	0.2339	0.0755	0.0202	0.0432
0.3021	0.2000	0.2000	0.2000	0.0979	0.0212	0.0451
0.3103	0.1702	0.2000	0.2000	0.1194	0.0222	0.0472
0.3212	0.1388	0.2000	0.2000	0.1400	0.0232	0.0495
0.3320	0.1074	0.2000	0.2000	0.1606	0.0241	0.0519
0.3429	0.0760	0.2000	0.2000	0.1812	0.0251	0.0544
0.3571	0.0399	0.2000	0.2031	0.2000	0.0261	0.057
0.3477	0	0.2000	0.2000	0.2523	0.0271	0.0624
0.2000	0	0.2000	0.2000	0.4000	0.0281	0.076

Cuadro 5.4: Portafolios eficientes obtenidos incluyendo 0.009 de costos de transacción.

Capítulo 6

Conclusiones

Se extendió el modelo clásico de Markowitz para incorporar los costos de transacción en forma de restricción, se desarrolló la parte teórica siguiendo el enfoque de Mitchell y Braun, y por útimo se implementó computacionalmente usando el software MATLAB® a través de un programa desarrollado en el entorno GUIDE para la selección de portafolio. El portafolio inicial elegido fue el portafolio $\frac{1}{N}$ el cual fue rebalanceado sujeto a varios costos de transacción según las preferencias del inversor.

En el caso de selección de portafolio de 5 compañías tecnológicas, los resultados fueron claros al mostrar que la solución al problema de minimización de riesgo, la frontera eficiente, se encuentra siempre por debajo de su equivalente al incorporar los costos de transacción, es decir los portafolios Markowitz eficientes poseen menor retorno esperado cuando se consideran los costos de transacción. La diferencia entres estas soluciones es mayor cuando aumenta el riesgo y retorno esperado del portafolio.

El análisis del efecto de los costos de transacción continuó probando tres valores diferentes. En cantidades mínimas, los portafolios ubicados en las zonas de alto riesgo y retorno resultan más afectados por este cambio y si el inversor estuvo considerando realizar una inversión con estas características será mejor considerar otros activos que se ajusten a sus preferencias. A medida que aumentan los costos de transacción, la nueva frontera eficiente se reduce a tal punto que la nueva zona de inversión es menor que la zona de no inversión.

Sobre los resultados para los casos con y sin costos de transacción, la inclusión de estos costos disminuye la frontera eficiente en comparación de la primera frontera eficiente obtenida. A medida que se aumentan los costos de transacción, se asentúan estas diferencias reduciendo ampliamente el punto mayor del riesgo. Ignorar los costos de transacción resulta en la obtención de portafolios que no se ajustan a la realidad del inversor y representan un costo adicional porque este debe ser revisado. Incluir los costos de transacción antes prepara al inversor para retornos más realistas a un mismo nivel de riesgo.

Mientras que el programa fue creado especificamente con el caso ejemplo en mente, una rápida vista al código junto con un conocimiento intermedio del lenguaje de programación MATLAB permitirá al lector la extensión de este programa para casos más generales, donde se pueda continuar automatizando más procesos como la selección del periodo de precios históricos directo desde la fuente, seleccionar los precios de Cierre o Apertura, así como también variar el portafolio inicial y aplicar más restricciones a los pesos.

Capítulo 7

Anexos

Precios Históricos

En la siguiente tabla se muestran los precios de cierre del primer día de cada mes desde Febrero del 2013 hasta Diciembre de 2017 obtenidos de la bolsa de valores electrónica NASDAQ mediante la página Yahoo Finance.

Fecha	IRBT	TSLA	IBM	MSFT	FB
01/02/2013	27.2500	164.4913	21.4400	24.0310	34.8300
01/03/2013	25.5800	175.4404	25.6600	24.9360	37.8900
01/04/2013	27.7700	166.5902	29.0900	28.8494	53.9900
01/05/2013	24.3500	171.0975	33.7900	30.4182	97.7600
01/06/2013	24.8800	157.9257	39.7700	30.3156	107.3600
01/07/2013	36.8000	161.1733	34.9600	27.9458	134.2800
01/08/2013	41.2900	150.6207	32.6700	29.3150	169.0000
01/09/2013	50.2300	153.7904	37.6500	29.4155	193.3700
01/10/2013	50.2100	148.8324	33.8700	31.2982	159.9400
01/11/2013	47.0100	149.2227	33.2100	33.7023	127.2800
01/12/2013	54.6500	156.6118	34.7700	33.3167	150.4300
01/01/2014	62.5700	147.5192	35.3400	33.6996	181.4100
01/02/2014	68.4600	154.6079	41.9200	34.1182	244.8100
01/03/2014	60.2400	161.6008	41.0500	36.7787	208.4500
01/04/2014	59.7800	164.9422	33.5000	36.2493	207.8900

Fecha	IRBT	TSLA	IBM	MSFT	FB
01/05/2014	63.3000	154.7755	35.3300	36.7338	207.7700
01/06/2014	67.2900	153.0674	40.9500	37.6797	240.0600
01/07/2014	72.6500	161.8493	32.3700	38.9990	223.3000
01/08/2014	74.8200	162.3813	32.4300	41.0501	269.7000
01/09/2014	79.0400	161.2436	30.4500	42.1521	242.6800
01/10/2014	74.9900	139.6431	35.7200	42.6885	241.7000
01/11/2014	77.7000	137.7489	36.4200	43.4705	244.5200
01/12/2014	78.0200	137.2121	34.7200	42.5003	222.4100
01/01/2015	75.9100	131.1144	31.5500	36.9647	203.6000
01/02/2015	78.9700	138.4950	32.8500	40.1214	203.3400
01/03/2015	82.2200	138.2263	32.6300	37.4674	188.7700
01/04/2015	78.7700	147.5190	32.4200	44.8208	226.0500
01/05/2015	79.1900	146.1065	31.9500	43.1806	250.8000
01/06/2015	85.7700	142.2341	31.8800	40.9477	268.2600
01/07/2015	94.0100	141.6482	30.7900	43.3128	266.1500
01/08/2015	89.7300	129.3188	29.3000	40.3634	249.0600
01/09/2015	89.9000	127.8178	29.1400	41.3205	248.4000
01/10/2015	101.9700	123.5064	30.0100	49.1439	206.9300
01/11/2015	104.2400	122.9245	33.0900	50.7403	230.2600
01/12/2015	104.6600	122.4756	35.4000	52.1444	240.0100
01/01/2016	112.2100	111.0575	33.9300	51.7778	191.2000
01/02/2016	106.9200	116.6108	31.3400	47.8210	191.9300
01/03/2016	114.1000	136.1604	35.3000	52.2821	229.7700
01/04/2016	117.5800	131.2067	37.3800	47.2082	240.7600
01/05/2016	118.8100	138.2193	38.5000	50.1712	223.2300
01/06/2016	114.2800	139.0961	35.0800	48.7776	212.2800
01/07/2016	123.9400	147.1974	37.9200	54.0300	234.7900
01/08/2016	126.1200	145.6028	39.8600	54.7736	212.0100
01/09/2016	128.2700	146.8326	43.9800	55.2492	204.0300
01/10/2016	130.9900	142.0629	50.7000	57.4745	197.7300
01/11/2016	118.4200	149.9476	57.0000	57.8007	189.4000
01/12/2016	115.0500	154.8244	58.4500	60.0066	213.6900
01/01/2017	130.3200	162.7806	60.5600	62.4304	251.9300
01/02/2017	135.5400	167.7241	57.0800	61.7834	249.9900

Fecha	IRBT	TSLA	IBM	MSFT	FB
01/03/2017	142.0500	163.7104	66.1400	63.9844	278.3000
01/04/2017	150.2500	150.6899	79.7400	66.5104	314.0700
01/05/2017	151.4600	143.4887	92.7200	67.8511	341.0100
01/06/2017	150.9800	146.0296	84.1400	67.3509	361.6100
01/07/2017	169.2500	137.3340	105.5100	71.0345	323.4700
01/08/2017	171.9700	135.7772	95.4200	73.0571	355.9000
01/09/2017	170.8700	139.1784	77.0600	73.1713	341.1000
01/10/2017	180.0600	147.7931	67.1900	81.7074	331.5300
01/11/2017	177.1800	143.0540	70.7100	82.6799	308.8500
01/12/2017	176.4600	148.6502	76.7000	84.4476	311.3500

Cuadro 7.1: Precios de activos de 5 empresas en intervalos mensuales desde el 01/02/2013 hasta 01/12/2017.

Retornos Históricos

Retornos obtenidos con los precios de cierre del primer día de cada mes desde Marzo del 2013 hasta Diciembre del 2017 obtenidos de la bolsa de valores electrónica NASDAQ mediante la página Yahoo Finance.

Fecha	IRBT	TSLA	IBM	MSFT	FB
01/03/2013	-0.0632	0.0644	0.1797	0.037	0.0842
01/04/2013	0.0821	-0.0518	0.1255	0.1458	0.3541
01/05/2013	-0.1314	0.0267	0.1498	0.053	0.5937
01/06/2013	0.0215	-0.0801	0.1629	-0.0034	0.0937
01/07/2013	0.3914	0.0204	-0.1289	-0.0814	0.2237
01/08/2013	0.1151	-0.0677	-0.0677	0.0478	0.23
01/09/2013	0.196	0.0208	0.1419	0.0034	0.1347
01/10/2013	-0.0004	-0.0328	-0.1058	0.062	-0.1898
01/11/2013	-0.0659	0.0026	-0.0197	0.074	-0.2284
01/12/2013	0.1506	0.0483	0.0459	-0.0115	0.1671
01/01/2014	0.1353	-0.0598	0.0163	0.0114	0.1873
01/02/2014	0.09	0.0469	0.1707	0.0123	0.2997
01/03/2014	-0.1279	0.0442	-0.021	0.0751	-0.1608
01/04/2014	-0.0077	0.0205	-0.2032	-0.0145	-0.0027
01/05/2014	0.0572	-0.0636	0.0532	0.0133	-0.0006
01/06/2014	0.0611	-0.0111	0.1476	0.0254	0.1445
01/07/2014	0.0766	0.0558	-0.2351	0.0344	-0.0724
01/08/2014	0.0294	0.0033	0.0019	0.0513	0.1888
01/09/2014	0.0549	-0.007	-0.063	0.0265	-0.1056
01/10/2014	-0.0526	-0.1438	0.1596	0.0126	-0.004
01/11/2014	0.0355	-0.0137	0.0194	0.0182	0.0116
01/12/2014	0.0041	-0.0039	-0.0478	-0.0226	-0.0948
01/01/2015	-0.0274	-0.0455	-0.0957	-0.1395	-0.0884
01/02/2015	0.0395	0.0548	0.0404	0.0819	-0.0013
01/03/2015	0.0403	-0.0019	-0.0067	-0.0684	-0.0744
01/04/2015	-0.0429	0.0651	-0.0065	0.1792	0.1802
01/05/2015	0.0053	-0.0096	-0.0146	-0.0373	0.1039

Fecha	IRBT	TSLA	IBM	MSFT	FB
01/06/2015	0.0798	-0.0269	-0.0022	-0.0531	0.0673
01/07/2015	0.0917	-0.0041	-0.0348	0.0562	-0.0079
01/08/2015	-0.0466	-0.0911	-0.0496	-0.0705	-0.0664
01/09/2015	0.0019	-0.0117	-0.0055	0.0234	-0.0027
01/10/2015	0.126	-0.0343	0.0294	0.1734	-0.1827
01/11/2015	0.022	-0.0047	0.0977	0.032	0.1068
01/12/2015	0.004	-0.0037	0.0675	0.0273	0.0415
01/01/2016	0.0697	-0.0979	-0.0424	-0.0071	-0.2274
01/02/2016	-0.0483	0.0488	-0.0794	-0.0795	0.0038
01/03/2016	0.065	0.155	0.119	0.0892	0.1799
01/04/2016	0.03	-0.0371	0.0573	-0.1021	0.0467
01/05/2016	0.0104	0.0521	0.0295	0.0609	-0.0756
01/06/2016	-0.0389	0.0063	-0.093	-0.0282	-0.0503
01/07/2016	0.0811	0.0566	0.0778	0.1023	0.1008
01/08/2016	0.0174	-0.0109	0.0499	0.0137	-0.1021
01/09/2016	0.0169	0.0084	0.0984	0.0086	-0.0384
01/10/2016	0.021	-0.033	0.1422	0.0395	-0.0314
01/11/2016	-0.1009	0.054	0.1171	0.0057	-0.043
01/12/2016	-0.0289	0.032	0.0251	0.0375	0.1207
01/01/2017	0.1246	0.0501	0.0355	0.0396	0.1646
01/02/2017	0.0393	0.0299	-0.0592	-0.0104	-0.0077
01/03/2017	0.0469	-0.0242	0.1473	0.035	0.1073
01/04/2017	0.0561	-0.0829	0.187	0.0387	0.1209
01/05/2017	0.008	-0.049	0.1508	0.02	0.0823
01/06/2017	-0.0032	0.0176	-0.0971	-0.0074	0.0587
01/07/2017	0.1142	-0.0614	0.2263	0.0532	-0.1115
01/08/2017	0.0159	-0.0114	-0.1005	0.0281	0.0955
01/09/2017	-0.0064	0.0247	-0.2137	0.0016	-0.0425
01/10/2017	0.0524	0.0601	-0.1371	0.1103	-0.0285
01/11/2017	-0.0161	-0.0326	0.0511	0.0118	-0.0709
01/12/2017	-0.0041	0.0384	0.0813	0.0212	0.0081

Cuadro 7.2: Retornos obtenidos de los activos de 5 empresas en intervalos mensuales desde el 01/03/2013 hasta 01/12/2017.

Funciones del Objeto Portafolio

A continuación se listan el total de las funciones del objeto *Portafolio* del conjunto de Herramientas Financieras de MATLAB® en su versión R2018a.

Método	**Descripción**
checkFeasibility	Determina si los portafolios son miembros del conjunto de portafolios viables
estimateAssetMoments	Estima la media y covarianza de los retornos de activos de los datos de precios o retornos
estimateBounds	Determina si el conjunto de portafolios viables es no vacío y acotado
estimateFrontier	Estima los portafolios en toda la frontera eficiente
estimateFrontierByReturn	Estima los portafolios en la frontera eficiente con retornos objetivo o agentes de retorno
estimateFrontierByRisk	Estimate los portafolios en la frontera eficiente con riesgos objetivo o agentes de riesgo
estimateFrontierLimits	Estima los portafolios en los extremos de la frontera eficiente (riesgo mínimo y retorno máximo)
estimatePortMoments	Estima la media y desviación estándar de retornos de portafolio para portafolios especificos
estimatePortReturn	Estima el retorno o agente de retorno para portafolios específicos
estimatePortRisk	Estima el riesgo o agente de riesgo para portafolios especificos
getAssetMoments	Obtiene la media y covarianza de los retornos de activo
getBounds	Obtiene las cotas inferior y superior del objeto
getBudget	Obtiene las restricciones de portafolio inferior y superior del objeto
getCosts	Obtiene los costos de transacción de compra y venta proporcionales del objeto

Método	Descripción
getEquality	Obtiene la matriz de restricción de igualdad y el vector del objeto
getInequality	Obtiene la matriz de restricciones de desigualdad y el vector del objeto
plotFrontier	Grafica la frontera eficiente y opcionalmente obtiene los retornos y riesgos para los portafolios en la frontera eficiente
setAssetList	Establece una lista de nombres de activos y símbolos que se asociaran a estos activos en el universo
setAssetMoments	Establece una media y covarianza de retornos de activos
setBounds	Establece cotas inferior y superior para pesos de portafolio
setBudget	Establece restricciones de presupuesto inferior y superior para pesos del portafolio
setCosts	Establece los costos de transacción de compra y venta proporcionales para los activos en el universo
setDefaultConstraints	Establece las restricciones por defecto para los pesos de portafolio (pesos no negativos que deben sumar 1)
setInitPort	Establace los pesos de portafolio iniciales
setTurnover	Establece restricciones de facturación promedio para pesos de portafolio

Propiedades del Objeto Portafolio

A continuación se listan las propiedades más importantes del objeto *Portafolio*, las cuales se pueden encontrar en la Documentación de MATLAB en su versión R2018a.

Propiedad	**Descripción**	**Características**
AssetCovar	Covarianza de retornos de activos	Matriz simétrica semidefinida positiva
AssetList	Lista de nombres de activos o identificadores	Vector de caracteres
AssetMean	Media de retornos de activos	Vector
bEquality	Vector para restricciones de igualdad	Vector
bInequality	Vector para restricciones de desigualdad	Vector
BuyCost	Costo de comprar activos	Vector
InitPort	Portafolio inicial o actual	Vector
LowerBound	Restricción de cota inferior	Vector
LowerBudget	Restricción de presupuesto inferior	Escalar
Name	Nombre para instancias del objeto Portafolio	String
NumAssets	Número de activos en el universo	Entero positivo escalar
RiskFreeRate	Retorno perdiodico de activos sin riesgo	Escalar
SellCost	Costos de vender activos	Vector
Turnover	Cota supeior de facturación de portafolio	Escalar
UpperBound	Restricción de cota superior	Vector
UpperBudget	Restricción de presupuesto superior	Escalar

Código fuente de Interfaz

A continuación, el resultado de incorporar las herramientas financieras de MATLAB® y los algoritmos aprendidos en el curso de Seminario de Tesis el semestre 2017-II a cargo del profesor Mg. Luis Javier Vásquez Serpa, el código fuente de la interfaz desarrollada en GUIDE que permite simplicar el análisis.

Código fuente 7.1: Interfaz principal

```
function varargout = portafolio(varargin)
%Asignar fondo blanco
set(0, 'DefaultFigureColor', [1 1 1]);
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, 'gui_Singleton',  gui_Singleton,  'gui_OpeningFcn', @porta_OpeningFcn, 'gui_OutputFcn',  @porta_OutputFcn, 'gui_LayoutFcn',  [] , 'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function porta_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

function varargout = porta_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

function examinar_Callback(hObject, eventdata, handles)
global archivo
global W
global TEXT
global V
global D
global DD
global AM
global AC
global numact

numact = str2double(get(handles.numactivos, 'String'));
D=zeros(59);

for i=1:1:numact
```

```
[archivo, carpeta] = uigetfile({'*.csv'},'Seleccione el archivo');
[carpeta, baseFileName, extension] = fileparts(archivo);
%q(i)=convertCharsToStrings(baseFileName)
q{i}=baseFileName;
[W TEXT]=xlsread(archivo);
D(:,i)=W(:,5);
end

if length(q) ~= length(unique(q))
     helpdlg('Se encontraron 2 activos iguales. Ingresa de nuevo');
end

V=cellstr(q');
set(handles.tableact2,'data',V);
D(1:59,1:numact);
DD=price2ret(D(1:59,1:numact));
AM=mean(DD);
AC=cov(DD);

if ~isempty(get(handles.numactivos))
    set(handles.textact,'String','Se ingresaron correctamente los activos');
end

if length(q) ~= length(unique(q))
    set(handles.textact,'String','Vuelva a ingresar los activos');
end

function limpiar_Callback(hObject, eventdata, handles)
selection = questdlg(['Desea limpiar el programa ' get(handles.Gui1,'Name') '?'],...
                     ['LIMPIAR ' get(handles.Gui1,'Name') '...'],...
                     'Si','No','Si');
if strcmp(selection,'Si')
    %cla reset; %elimina grafico en axes
    set(handles.costost,'String','');
    set(handles.nodos,'String','');
    set(handles.numactivos,'String','');
    set(handles.tableact2,'data','');
    set(handles.tablepesos,'data','');
    set(handles.tablepesosct,'data','');
end

function costost_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function optimizar_Callback(hObject, eventdata, handles)
cla;
clc;
global AM
global AC
global NP
p = Portfolio('AssetMean', AM, 'AssetCovar', AC, 'lowerbudget', 1, 'upperbudget', 1, 'lowerbound', 0);
p = setInitPort(p,1/3);
pwgt1 = estimateFrontier(p, NP);
[ersk,eret] = estimatePortMoments(p,pwgt1);
rimin=ersk(1);
rimax=ersk(NP);
remin=eret(1);
remax=eret(NP);
awgt = estimateFrontierByReturn(p,remax);
bwgt = estimateFrontierByRisk(p,rimin);
if (get(handles.retornomax,'value')==1)
set(handles.tablepesos,'data',awgt);
elseif (get(handles.riesgomin,'value')==1)
    set(handles.tablepesos,'data',bwgt);
end

function aplicar_Callback(hObject, eventdata, handles)
global AM
global AC
global NP
p = Portfolio('AssetMean', AM, 'AssetCovar', AC, 'lowerbudget', 1, 'upperbudget', 1, 'lowerbound', 0);
p = setInitPort(p,1/p.NumAssets);
[ersk,eret] = estimatePortMoments(p,p.InitPort);
C = str2double(get(handles.costost, 'String'));
BuyCost = C;
SellCost = C;
q = setCosts(p,C,C);
qwgt = estimateFrontier(q,NP);
[qrsk, qret] = estimatePortMoments(q,qwgt);
%Riesgos y Retornos CT (min y max)
riminct=qrsk(1);
rimaxct=qrsk(NP);
reminct=qret(1);
remaxct=qret(NP);
ctawgt = estimateFrontierByReturn(p,remaxct);
ctbwgt = estimateFrontierByRisk(p,riminct);

if (get(handles.retornomax,'value')==1)
set(handles.tablepesosct,'data',ctawgt);
elseif (get(handles.riesgomin,'value')==1)
    set(handles.tablepesosct,'data',ctbwgt);
end
```

```
function nodos_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function filename_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function rimin_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function remin_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function rimax_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function remax_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function rimినct_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function remినct_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function rimaxct_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit14_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function remaxct_Callback(hObject, eventdata, handles)

function remaxct_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function calcu_Callback(hObject, eventdata, handles)
calculadora %nueva ventana

function noport_Callback(hObject, eventdata, handles)
global NP
NP = str2double(get(handles.nodos, 'String'));

function numactivos_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function ingresar_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function hallar_Callback(hObject, eventdata, handles)
global p
in=str2double(get(handles.ingresar, 'String'));
if get(handles.retcheck,'value')==1 && get(handles.richeck,'value')==0
    awgt = estimateFrontierByReturn(p,in);
    [arsk,aret] = estimatePortMoments(p,awgt);
    set(handles.salir,'String',arsk);
end

if get(handles.richeck,'value')==1 && get(handles.retcheck,'value')==0
    bwgt = estimateFrontierByRisk(p,in);
    [brsk,bret] = estimatePortMoments(p,bwgt);
    set(handles.salir,'String',bret);
end

function salir_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

Código fuente 7.2: Grafico de activos y retornos

```
function varargout = calculadora(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, 'gui_Singleton',  gui_Singleton, 'gui_OpeningFcn',
     calculadora_OpeningFcn, 'gui_OutputFcn',  @calculadora_OutputFcn, 'gui_LayoutFcn',  []
    , 'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function calculadora_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

function varargout = calculadora_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

function retdes_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function risesp_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function retesp_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function risdes_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
global numact
global D
global V
global DD
VV=convertCharsToStrings(V);
axes(handles.axes3)
```

```
for k=1:numact
plot (D(:,k))
sprintf('Activo %i',V{k});
hold on
end

legend(VV)
set(legend,'location','best')

axes(handles.axes2)
for k=1:numact
plot (DD(:,k))
sprintf('Retorno de activo %i',V{k});
hold on
end
legend(VV)
set(legend,'location','best')
```

Código fuente 7.3: Calculadora interfaz

```
function varargout = target(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, 'gui_Singleton',  gui_Singleton, 'gui_OpeningFcn',
     @target_OpeningFcn, 'gui_OutputFcn',  @target_OutputFcn, 'gui_LayoutFcn',  [] , '
    gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function target_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

function varargout = target_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

function retobj_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function riesgo_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function riobj_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function retorno_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function operador_Callback(hObject, eventdata, handles)
global p
global AM
global AC
global AL
global NP
```

```
cla;

p = Portfolio('AssetMean', AM, 'AssetCovar', AC, 'lowerbudget', 1, 'upperbudget', 1, '
    lowerbound', 0);
p = setAssetList(p, AL);
p.plotFrontier(NP);
title('Comparacion de resultados');
xlabel('Desviacion Estandar de Retornos de Portafolio');
ylabel('Media de Retornos de Portafolio');

if (get(handles.ct,'value')==0)
p = setInitPort(p,1/p.NumAssets);
asdwgt = estimateFrontier(p,NP);
[ersk,eret] = estimatePortMoments(p,asdwgt);
w1=[ersk, eret];
set(handles.fei,'data',w1);
else
C = str2double(get(handles.textoct, 'String'));
V = str2double(get(handles.textoct, 'String'));
p = setInitPort(p,1/p.NumAssets);
[ersk,eret] = estimatePortMoments(p,p.InitPort);
BuyCost = C;
SellCost = V;
q = setCosts(p,BuyCost,SellCost);
qwgt = estimateFrontier(q,NP);
[qrsk,qret] = estimatePortMoments(q,qwgt);
hold on
plot(qrsk, qret);
w2=[qrsk, qret];
legend('Frontera Inicial', 'Frontera Eficiente con Costos de Transaccion');
set(legend,'location','best')
set(handles.fect,'data',w2);
end

function textoct_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function fei_CellSelectionCallback(hObject, eventdata, handles)
```

Bibliografía

[Adcock and Meade, 1994] Adcock, C. and Meade, N. (1994). *A simple algorithm to incorporate transactions costs in quadratic optimisation.* 30

[Andersen et al., 2012] Andersen, E., Dahl, J., and Friberg, H. (2012). Markowitz portfolio optimization using MOSEK. https://docs.mosek.com/whitepapers/portfolio.pdf. 44

[BCR, 2011] BCR (2011). *Glosario de Términos Económicos.* 11, 13, 17

[Best, 2010] Best, M. (2010). *Portfolio Optimization.* CRC Press. 26

[Blitz and Vliet, 2008] Blitz, D. and Vliet, P. (2008). Global Tactical Cross-Asset Allocation: Applying Value and Momentum Across Asset Classes. 17

[Darst, 2008] Darst, D. (2008). *The Art of Asset Allocation: Principles and Investment Strategies for Any Market.* McGraw-Hill. 15

[Fabozzi et al., 2007] Fabozzi, F., Kolm, P., Pachamanova, D., and Focardi, S. (2007). *Robust Portfolio: Optimization and Management.* John Wiley & Sons, Hoboken, Nueva Jersey, EE.UU. 15, 20, 21, 23, 27, 28, 29

[Hillier and Lieberman, 2001] Hillier, F. and Lieberman, G. (2001). *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill. 9

[Idzorek, 2006] Idzorek, T. (2006). Strategic Asset Allocation and Commodities. 16

[InvestExcel, 2013] InvestExcel (2013). Mean-Variance Portfolio Optimization with Excel. http://investexcel.net/mean-variance-portfolio-optimization-with-excel/. 43

[Lobo et al., 2007] Lobo, M., Fazel, M., and Boyd, S. (2007). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. 30, 44

[Luenberg, 1998] Luenberg, D. (1998). *Investment Science.* Oxford University Press. 14

[Marasovic et al., 2015] Marasovic, B., Pivac, S., and Vukasovic, V. (2015). The Impact of Transaction Costs on Rebalancing an Investment Portfolio in Portfolio Optimization. 30

[MathWorks, 2012] MathWorks (2012). Financial Toolbox: For Use with MATLAB. 40

[MathWorks, 2018] MathWorks (2018). MATLAB Econometric Toolbox User's Guide. 39

[Mitchell and Braun, 2002] Mitchell, J. and Braun, S. (2002). Rebalancing an Investment Portfolio in the Presence of Transaction Costs. 2, 30

[Peressini, 1988] Peressini, A. Sullivan, F. (1988). *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer. 22

[Pogue, 1970] Pogue, G. A. (1970). An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions' Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes. 2, 30

[Rasmussen, 2003] Rasmussen, M. (2003). *Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management*. Palgrave Macmillan. 14, 15, 26

[Shiryaev, 1999] Shiryaev, A. (1999). *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. World Scientific. 12

[Torres, 2011] Torres, J. (2011). La formación de una cartera óptima de activos: una guía para no especialistas. 16

[Vásquez et al., 2017] Vásquez, L. J., Dextre, K., Mejia, D., and Calapuja, A. (2017). Elección de portafolios óptimos de activos con y sin riegos. 21

[Winston, 2003] Winston, W. (2003). *Operations Research: Applications and Algorithms*. Duxbury Press. 9

[Woodside, 2011] Woodside, M. (2011). Portfolio Optimisation with Transaction Cost. 43